GOTTLOB FREGE

CONCEPTOGRAFÍA
*
LOS FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA

OTROS ESTUDIOS FILOSÓFICOS

Traducción de HUGO PADILLA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

1972

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

Colección: FILOSOFÍA CONTEMPORÁNEA

Serie: TEXTOS FUNDAMENTALES *Director:* DR. FERNANDO SALMERÓN

Secretario: MTRO. ALEJANDRO ROSSI

Títulos originales:
Begriffsschritt, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879

Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-marhematische Untersuchung ueber den Begriff der Zahl, Breslau, 1884

Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, 1882

Funktion und Begriff, Jena, 1891

Ueber Begriff und Gegenstand, 1892

Was ist eine Funktion?, 1904

Primera edición en español: 1972

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dirección General de Publicaciones

Impreso y hecho en México

CONCEPTOGRAFÍA [a]

UN LENGUAJE DE FORMULAS, SEMEJANTE AL DE LA ARITMÉTICA, PARA EL PENSAMIENTO PURO

PRÓLOGO

El conocimiento de una verdad científica pasa, como regla, por varios grados de certidumbre. Quizá conjeturada al principio sobre la base de un número insuficiente de casos particulares, una proposición general se consolida cada vez más seguramente al cobrar conexión con otras verdades a través de cadenas de inferencias, ya sea que de ella se deriven consecuencias que encuentren confirmación de otra manera, ya sea que, a la inversa, se la reconozca como consecuencia de proposiciones ya establecidas. Según esto, por una parte se puede preguntar por el modo en que gradualmente se gana una proposición y, por la otra, por la manera en que finalmente se la fundamenta con máxima firmeza. Acaso la primera cuestión sea contestada de modo diferente por diferentes hombres: la última es más definida y su respuesta se conecta con la naturaleza interna de la proposición considerada. Es patente que la más firme es la prueba lógica pura, la cual, prescindiendo de las características particulares de la cosa, sólo, se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. Por tanto, dividimos en dos clases todas las verdades que requieren una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos. Pero es perfectamente compatible el que una proposición pertenezca a la primera clase y que, sin embargo, jamás llegara a ser consciente en una mente humana si no hubiera actividad sensorial.[1] De esta manera, no es el modo psicológico de producirse, sino el tipo más completo de prueba lo que está en la base de la clasificación. Mientras me sometí a la pregunta de a cuál de estas dos clases pertenecen los juicios matemáticos, debí ensayar qué tan lejos se podría llegar en (8) [b] la aritmética exclusivamente por medio de inferencias, apoyado sólo en las leyes del pensamiento que se elevan sobre todas las particularidades. Mi procedimiento fue éste: primero, busqué retrotraer el concepto de ordenación en una serie al de consecuencia *lógica* y de aquí progresar hasta el concepto de número. Además, para que no pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, se debió llegar a suprimir toda laguna en la cadena de inferencias. Al procurar cumplir lo más rigurosamente posible con este requerimiento, me encontré, junto a todas las dificultades que surgen de la expresión, un obstáculo en la inadecuación del lenguaje: cuanto más complicadas eran las relaciones tanto menos podía alcanzar la exactitud requerida por mi propósito. De estas necesidades nació la idea de la presente conceptografía. Por lo pronto, ésta debe servir para probar de la manera más segura la precisión de una cadena de inferencias y para denunciar toda proposición que quisiera colarse inadvertidamente y poder investigarla en su origen. Por ello, se renuncia a expresar todo aquello que carezca de significado para la *secuencia de inferencias.* En § 3, he designado como *contenido conceptual* exclusivamente aquello que me era de importancia. Esta explicación se deberá tener siempre en mente si se quiere entender correctamente la naturaleza de mi lenguaje de fórmulas. También de aquí resultó el nombre: "conceptografía". Puesto que me he limitado a expresar, por primera vez, relaciones independientes de las propiedades específicas de las cosas, pude también emplear la expresión "lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro". La semejanza, que he indicado en el título, con el lenguaje de fórmulas de la aritmética se refiere más a las ideas fundamentales que a las conformaciones particulares. Estuvo del todo lejos de mí cualquier propósito de establecer una semejanza artificial por entender al concepto como suma de sus notas. El más inmediato contacto de mi lenguaje de fórmulas con el de la aritmética consiste en el modo de utilizar las letras.

Creo poder hacer muy clara la relación de mi conceptografía con el lenguaje común si la comparo con la que hay entre el microscopio y el ojo. Este último, por el campo de su aplicabilidad y la movilidad con que se sabe adaptar a las más diversas situaciones, posee gran superioridad frente al microscopio. Considerado como aparato óptico, muestra sin duda muchas imperfecciones, las cuales pasan desapercibidas, por lo común, sólo como consecuencia de su estrecha conexión con la vida mental. Pero tan pronto como los propósitos científicos establecen mayores exigencias en la precisión de las distinciones, el ojo resulta insuficiente. Por el (9) contrario, el microscopio es de lo más apropiado para tales fines, aunque, por ello, no es utilizable para otros.

Así, esta conceptografía ha sido ideada como un auxiliar para determinados propósitos científicos y no se la puede sentenciar porque no sirva para otros. Si de algún modo corresponde a estos fines, no importa que se puedan echar de menos verdades nuevas en mi trabajo. Me consolaría, sobre esto, la conciencia de que también un desarrollo del método hace prosperar a la ciencia. Pues Bacon consideró preferible inventar un medio por el cual se pudiera descubrir fácilmente cualquier cosa, a descubrir algo particular,

[1] Puesto que sin percepción sensorial es imposible algún desarrollo mental en los seres que nos son conocidos, entonces lo último vale para todos los juicios.

y, por cierto, todos los grandes progresos científicos recientes han tenido su origen en un perfeccionamiento del método.

También Leibniz conoció la ventaja de un modo de simbolización adecuado. Su idea de una característica general, de un *calculus philosophicus o raciocinator*,[2] era tan gigantesca que el intento de desarrollarla hubo de quedarse en los meros preparativos. El entusiasmo que prendió en su creador cuando ponderó el inmenso incremento de la capacidad mental humana que podría surgir de un método de simbolización apropiado a las cosas mismas, lo hizo estimar demasiado estrechamente las dificultades que se oponen a una empresa así. Pero si tampoco se puede alcanzar tan alta meta en un intento, no hay que desesperar de obtener una aproximación más lenta, paso a paso. Si una tarea parece irresoluble en su plena generalidad, provisionalmente se la ha de limitar; pues, tal vez, se la logre vencer por medio de ampliaciones graduales. En los símbolos aritméticos, geométricos, químicos, se pueden ver realizaciones de la idea leibniziana respecto a campos particulares. La conceptografía aquí propuesta, además, añade una nueva a éstas, y ciertamente una situada en el medio paredaño a las otras. A partir de aquí, por tanto, se abren las más amplias perspectivas para llenar las lagunas de los lenguajes de fórmulas existentes, para conectar en un solo dominio campos separados hasta ahora y para ampliarse a campos en los que tal lenguaje faltaba.

Sobre todo, confío en una feliz aplicación de mi conceptografía cuando deba ser puesto un valor especial en la precisión de una prueba, como cuando se trata de los fundamentos del cálculo diferencial e integral.

Me parece todavía más fácil extender el campo de este lenguaje de fórmulas a la geometría. Sólo se han de añadir algunos símbolos para las relaciones intuitivas que ahí aparecen. De esta manera se obtendría una especie de *analysis situs*. (10)

El paso a la teoría del movimiento puro, y aun a la mecánica y a la física, podrían seguirse de aquí. En los últimos campos, donde junto a la necesidad racional se hace valer la necesidad natural, es donde primero es de prever un mayor desarrollo del modo de simbolización de acuerdo con el progreso del conocimiento. Pero, por eso, no es necesario esperar hasta que parezca excluida la posibilidad de tales transformaciones.

Si es una tarea de la filosofía romper el dominio de la palabra sobre la mente humana al descubrir los engaños que sobre las relaciones de los conceptos surgen casi inevitablemente en el uso del lenguaje, al liberar al pensamiento de aquellos con que lo plaga la naturaleza de los medios lingüísticos de expresión, entonces mi conceptografía, más desarrollada para estos propósitos, podría ser un instrumento útil a los filósofos. Ciertamente, tampoco volverá puros a los pensamientos, como que no es posible otra cosa con un medio de presentación externo; pero, por una parte, se pueden limitar estas discrepancias a aquellas inevitables e inocuas y, por otra parte, en virtud de que son de un tipo totalmente distinto al de las que son propias del lenguaje, se ofrece ya una protección contra, una influencia unilateral de este medio de expresión. La mera invención de esta conceptografía, me parece, ha hecho prosperar a la lógica. Espero que los lógicos, si no se dejan intimidar por una primera impresión frente a lo extraño, no negarán su asentimiento a las innovaciones a que me vi impelido por una necesidad inherente al asunto mismo. Estas discrepancias con lo tradicional encuentran su justificación en que la lógica, hasta ahora, siempre se ha ajustado muy estrechamente al lenguaje y a la gramática. En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función,* se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo la aprehensión de un contenido como función de un argumento surte el efecto de una aprehensión formadora de conceptos. Más aún, la demostración de la conexión entre los significados de las palabras sí, y*, no,* o*, existe, algunos, todos,* etc., merece atención.

Ya únicamente requiere mención especial lo siguiente. La restricción a un solo modo de inferencia, expresada en §6, se justifica en virtud de que en la *fundamentación* de una conceptografía de este tipo, los componentes primitivos se deben tomar tan simples como sea posible si se ha de producir orden y claridad. Esto no excluye el que, posteriormente, transiciones de varios juicios a uno nuevo, transiciones que según este solo modo de inferencia únicamente son posibles de manera mediata, se transformen por abreviación en inmediatas. De hecho, esto se podría recomendar (11) para alguna aplicación posterior. De esta manera, pues, surgirían más modos de inferencia.

Suplementariamente, he señalado que las fórmulas (31) y (41) podrían reducirse a

$$\vdash\!\!\!-\!\!-\!\!-(\top\!\!\top\, a \equiv a),$$

por la que son posibles aún algunas simplificaciones.

[2] Sobre esto, véase: Tredelenburg, Historische Beiträge zur Philosophie, tomo III.

Como he señalado al principio, la aritmética ha sido el punto de partida del curso de pensamiento que me ha conducido a mi conceptografía. A esta ciencia, por tanto, pensé aplicarla primero, tratando de analizar más sus conceptos y de fundamentar más a fondo sus teoremas. Por lo pronto, en la tercera sección comunico algo que apunta en esta dirección. La prosecución del camino indicado, la elucidación de los conceptos de número, magnitud, etc., será objeto de otras investigaciones que aparecerán inmediatamente después de este escrito.

Jena, 18 de diciembre de 1878.

I. DEFINICIÓN DE LOS SÍMBOLOS

§ 1. En la teoría general de las magnitudes, los símbolos usuales se dividen en dos tipos. El primero comprende las letras, cada una de las cuales representa un número que se deja indeterminado o una función que se deja indeterminada. Esta indeterminación hace posible que las letras se empleen para expresar validez general de las proposiciones, como en

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

El otro tipo comprende aquellos símbolos como +, —, √, 0, 1. 2,cada uno de los cuales tiene su significado particular.

Adopto esta idea básica de distinguir dos tipos de símbolos, lo cual por desgracia no se realiza con pureza en la teoría de las magnitudes,[3] *para hacerla utilizable en el campo más amplio del pensamiento puro en general.* Por tanto, divido todos los símbolos que empleo en *aquéllos bajo los cuales se puede representar algo distinto,* y *aquellos que tienen un sentido totalmente determinado.* Los primeros son las *letras,* y éstas han de servir principalmente para expresar la *generalidad.* Pero, a pesar de la indeterminación, se debe insistir en que una letra *conserve* en el mismo contexto el significado que ya se le haya dado.

EL JUICIO

§ 2. Un juicio se expresará siempre por medio del símbolo

$$\vdash\!\!\!\!\text{——},$$

colocado a la izquierda de los símbolos o combinaciones de símbolos que indican el contenido del juicio. Si se omite la pequeña (14) barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, esto transforma el juicio en una *mera combinación de ideas* acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce o no verdad en ella. Por ejemplo, hagamos que

$$\vdash\!\!\!\!\text{——} A$$

signifique el juicio: "los polos magnéticos opuestos se atraen"; [4] entonces,

$$\text{——} A$$

no expresará este juicio, sino que únicamente ha de provocar en el lector la representación de' la atracción recíproca de los polos opuestos, para eventualmcnte sacar consecuencias de esto y, con ellas, probar la corrección de la idea. En este caso, *parafraseamos* por medio de las palabras *"la circunstancia de que"* o *"la proposición de que".*

No todo contenido puede convertirse en un juicio porque $\vdash\!\!\!\!\text{——}$ esté antepuesto a su símbolo; no, por ejemplo, la representación "casa". Por tanto, distinguimos entre contenidos *judicables* y *no judicables.* [5]

La *barra horizontal,* a partir de la cual se forma el símbolo $\vdash\!\!\!\!\text{——}$, *combina en un todo los símbolos que le siguen, y a este todo se refiere la afirmación expresada por la barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal.* A la barra horizontal se le puede llamar *barra del contenido;* a la vertical, *barra del juicio.* La barra del contenido sirve también, además, para poner en relación cualquier símbolo con el todo de símbolos que sigue a la barra. Lo que sigue a la barra del contenido debe tener siempre un contenido judicable.

---

[3] Piénsese en 1, log, sen, lim.
[4] Utilizo las letras griegas como abreviaciones; si no las defino específicamente, el lector les puede atribuir un sentido conveniente.
[5] Por otra parte, la circunstancia de que hay casas (o una casa) (cfr. §12), sería un contenido judicable. Pero la representación "casa" es sólo una parte de éste. En la proposición: "la casa de Príamo era de madera", en el lugar de "casa" no se podría sustituir "circunstancia de que hay una casa". Un ejemplo de otro tipo para un contenido no judicable, se ve junto a la fórmula (81).

§ 3. En mi modo de representar un juicio,no *tiene lugar* una distinción entre *sujeto* y *predicado.* Para justificar esto, advierto que los contenidos de dos juicios pueden ser distintos de doble manera: primero, que las consecuencias que se puedan derivar de uno, en combinación con otros juicios determinados, se sigan también del otro, en combinación con los mismos otros juicios; en segundo lugar, (15) que no sea este el caso. Las dos proposiciones: "en Platea derrotaron los griegos a los persas" y "en Platea fueron derrotados los persas por los griegos", se distinguen de la primera manera. Aun cuando se puede reconocer una pequeña diferencia en el sentido, la concordancia, no obstante, prevalece. Así, a aquella parte del contenido que es la *misma* en ambas, la llamo el *contenido judicable.* Puesto que *sólo éste* tiene significado para la conceptogra-fía, no necesito hacer distinción alguna entre proposiciones que tienen el mismo contenido judicable. Si se dice: "sujeto es el concepto de que trata el juicio", esto conviene también al objeto. Por tanto, se puede decir únicamente: "sujeto es el concepto de que trata principalmente el juicio". El lugar del sujeto en la serie de palabras tiene para el lenguaje el significado de un lugar sin-gularizado, en donde se pone aquello sobre lo cual se quiere atraer la atención de quien escucha (véase también §9). Esto, por ejemplo, puede tener el propósito de indicar una relación de este juicio con otros y, con ello, facilitar al oyente la comprensión del contexto entero. Así, todos los fenómenos del lenguaje que surgen sólo de la interacción del parlante y el oyente, en que, por ejemplo, el parlante toma en consideración la expectación del oyente e intenta ponerlo sobre la pista correcta aun antes de pronunciar una proposición, nada tienen que les corresponda en mi lenguaje de fórmulas, ya que en los juicios sólo se considera aquello que influye en las *posibles consecuencias.* Cabalmente se expresará todo lo necesario para una inferencia correcta; pero lo que no es necesario, por lo general tampoco se indicará; *nada se dejará a la adivinanza.* En esto sigo por completo el ejemplo del lenguaje de fórmulas matemático, en el que también sólo forzadamente se puede distinguir entre sujeto y predicado. Se puede imaginar un lenguaje en el cual la proposición: "Arquímedes pereció en la toma de Si-racusa", pudiera expresarse de la siguiente manera: "la muerte violenta.de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho". Ciertamente, también aquí se puede, si se quiere, distinguir entre sujeto y predicado, pero el sujeto encierra el contenido completo, y el predicado sólo tiene el propósito de poner a éste como juicio. Un *lenguaje así, tendría únicamente un predicado para todos los juicios, a saber, "es un hecho".* Se ve que en absoluto puede hablarse aquí de sujeto y predicado en el sentido habitual.
Nuestra conceptografía es un lenguaje así, y el símbolo $\vdash\!\!-\!\!-$ *es, en él, el predicado común para todos los juicios.*

En el primer esbozo de un lenguaje de fórmulas me dejé llevar por el ejemplo del lenguaje ordinario, componiendo los juicios con (16) sujeto y predicado. Pero pronto me persuadí de que esto era contrario a mi propósito y de que sólo conducía a prolijidades inútiles.

§ 4. Las notas siguientes deben explicar el significado de las distinciones que, para nuestros propósitos, se hacen en relación a los juicios.

Se distingue entre juicios *universales* y *particulares: en* manera alguna es ésta una distinción entre los juicios, sino entre los contenidos. Se debería decir: *"un juicio con contenido universal", "un juicio con contenido particular".* Es decir, estas propiedades corresponden al contenido, aun cuando éste no se ponga como juicio, sino como proposición (véase §2).

Lo mismo vale para la negación. Por ejemplo en una prueba indirecta se dice: "suponga que los segmentos AB y CD no fueran iguales". Aquí, el contenido de que los segmentos AB y CD no sean iguales, contiene una negación; pero este contenido, si bien apto para la judicación, no se propone como juicio. Por tanto, la negación se adhiere al contenido, ya sea que éste se presente como juicio o no. Así, tengo por más apropiado considerar la negación como una nota de un contenido judicable.

La distinción de los juicios en categóricos, hipotéticos ydisyuntivos, me parece que sólo tiene significación gramatical.[6]

El juicio apodíctico se distingue del asertórico en que se sugiere la existencia de juicios universales de los cuales se puede inferir la proposición, mientras que en el asertórico falta tal sugerencia. Cuando designo una proposición como necesaria, con ello doy una indicación sobre mis fundamentos de juicio. *Pero, puesto que con esto no se toca el contenido conceptual del juicio, la forma del juicio apodíctico no tiene para nosotros importancia alguna.*

Cuando se pone una proposición como posible, o el parlante se abstiene de juicio, con lo cual indica que no conoce ley alguna de la cual podría derivar su negación, o dice que en su generalidad es falsa la negación de la proposición. En el último caso, tenemos un *juicio particular afirmativo* [7]*,* según la denomi-

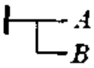
[6] La razón sera resultado del libro entero.
[7] Véase § 12.

nación usual. "Es posible que la tierra alguna vez choque con otro cuerpo celeste", es un ejemplo de lo primero, y "un resfriado puede tener como consecuencia la muerte", es un ejemplo para el segundo caso. (17)

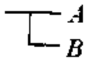
LA CONDICIONALIDAD

§ 5. Si A y B significan contenidos judicables,[8] entonces hay las siguientes cuatro posibilidades

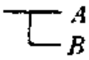
1) A es afirmada y B es afirmada;
2) A es afirmada y B es negada;
3) A es negada y B es afirmada;
4) A es negada y B es negada.



significa, pues, el juicio de *que no tiene lugar la tercera de estas posibilidades, sino una de las otras tres.* Según esto, si se niega,



significa esto que la tercera posibilidad tiene lugar, por tanto, que A se niega y B se afirma. De los casos en que

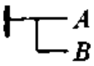


se afirma, hacemos resaltar los siguientes:

1) A debe ser afirmada. Luego, el contenido de B es completamente irrelevante. Por ejemplo, sea que: ⊢——*A* signifique que 3 X 7 = 21 y B signifique la circunstancia de que el sol brilla. Aquí, sólo los "dos primeros de los cuatro casos mencionados son posibles. No es necesario que se presente una conexión causal entre ambos contenidos.

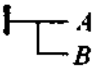
2) B se ha de negar. Luego, el contenido de A es irrelevante. Por ejemplo, sea que: B signifique la circunstancia de que un *perpetuum mobile* es posible y A la circunstancia de que el mundo es infinito. Aquí, sólo el segundo y el cuarto de los cuatro casos son posibles. No es necesario que exista una conexión causal entre A y B.

3) Podemos hacer el juicio



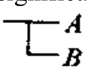
,

(18) sin saber si se han de afirmar o negar A y B. Por ejemplo, signifique B la circunstancia de que la luna está en cuadratura y A la circunstancia de que parece un semicírculo. En este caso, se puede traducir



con ayuda del termino conjuntivo "si": "si la luna está en cuadratura, entonces parece un semicírculo". La conexión causal que se halla en la palabra "si", sin embargo, no se expresa por medio de nuestros símbolos, aunque un juicio de este tipo sólo puede emitirse con base en esto. Pues esta conexión es algo general, pero esto no ha sido expresado todavía (véase §12).

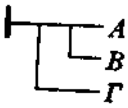
Llámese *barra de condición*, a la barra vertical que une a las dos horizontales. La parte de la barra horizontal superior que se encuentra a la izquierda de la barra de condición es la barra del contenido para el significado, explicado ya, de la combinación de símbolos

:

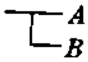
a esto se unirá todo símbolo que haya de referirse al contenido total de la expresión. La parte de la barra horizontal que está entre A y la barra de condición es la barra del contenido de A. La barra horizontal, a la izquierda de B, es la barra del contenido de B.

Según eso, es fácil reconocer que

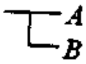
[8] § 2



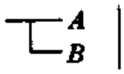
niega el caso en que A es negada y *B y* Γ [c] son afirmadas. Se debe pensar que esto se compone de



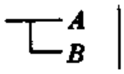
y Γ así como



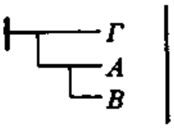
(19) se compone de A y B. Por lo pronto, tenemos la negación del caso en que



se niega y Γ se afirma. Pero, la negación de

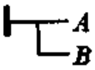
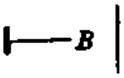


significa que A se niega y B se afirma. De aquí resulta lo que antes se ofreció. Si se presenta una conexión causal, entonces también se puede decir: "A es la consecuencia necesaria de B y Γ o si ocurren las circunstancias B y Γ, entonces también ocurre A". No menos se reconoce que

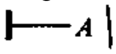


niega el caso en que *B* es afirmada, pero A y Γ son negadas. Si se presupone una conexión causal, entre A y B, entonces se puede traducir: "si A es la consecuencia necesaria de B, entonces se puede inferir que Γ tiene lugar".

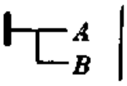
§ 6. De la definición dada en §5, resulta que de los dos juicios

 y 

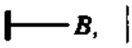
se sigue el nuevo juicio



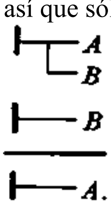
De los cuatro casos enumerados antes, el tercero se excluye por



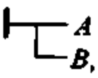
pero el segundo y el cuarto se excluyen por

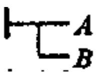


así que sólo queda el primero. Eventualmentc, esta inferencia podría escribirse así: (20)

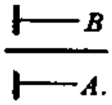


Esto resultaría prolijo, si en los lugares de A y B hubiera expresiones mayores, ya que cada una de ellas se escribiría dos veces. Por ello, utilizo la siguiente abreviación. A cada juicio que aparezca en el contexto de la prueba se le designará por medio de un número, el cual será colocado a la derecha de este juicio cuando aparezca por primera vez. A manera de ejemplo, sea designado el juicio

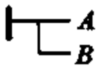


—o uno tal que contenga  como caso especial— por medio de X. Entonces, escribo la

inferencia así:

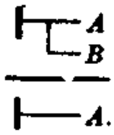
(X): 

Con esto, se deja al lector componer el juicio



a partir de $\vdash B$ y $\vdash A$ y ver si esta acorde con el juicio X aducido.

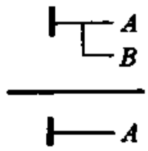
Si, a manera de ejemplo, el juicio $\vdash B$ se designa por medio de XX, entonces también escribo la misma inferencia como sigue

(XX):: 

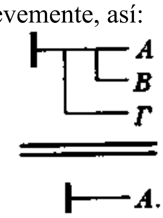
Aquí, los dobles puntos indican que $\vdash B$, sólo aludido por medio de XX, se debe construir de una manera distinta a la anterior a partir de los dos juicios apuntados. [21]

Si aún, digamos, se designara al juicio $\vdash \Gamma$ por medio de XXX, entonces se escribirían los dos juicios

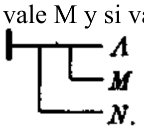
(XXX):: 

(XX):: 

todavía más brevemente, así:

(XX, XXX):: 

Con Aristóteles, podemos enumerar en lógica una serie completa de modos de inferencia; yo sólo me sirvo de éste —al menos, en todos los casos en que de más de un solo juicio se deriva uno nuevo. A saber, la verdad contenida en otros modos de inferencia, se puede expresar en un juicio de la forma: si vale M y si vale N, entonces también vale A; en símbolos:

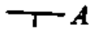


De este juicio, y de $\vdash N$ y $\vdash M$, se sigue, entonces, $\vdash A$, como se expresa arriba. Así, una inferencia hecha según cualquier modo de inferencia, puede ser reducida a nuestro caso. Puesto que es posible salir adelante con un solo modo de inferencia, entonces es un precepto de claridad hacerlo así. Además, sucede que, de esta manera, tampoco habría razón para quedarse con los modos de inferencia aristotélicos, ya que siempre se podrían añadir, indefinidamente, nuevos modos: de cada juicio expresado en fórmula en §§13-22, se podría hacer un modo diferente. Con *esta limitación a un solo modo de inferencia, sin embargo, en manera alguna se quiere expresar una proposición psicológica, sino únicamente resolver una cuestión de forma de la manera más expedita.* [22] En §22, fórmulas (59), (62), y (65), se presentarán algunos de los juicios que aparecen en lugar de los modos de inferencia aristotélicos.

LA NEGACIÓN

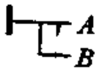
§ 7. Si se añade una pequeña barra vertical en la parte inferior de la barra del contenido, entonces con ello se quiere expresar la circunstancia de que *el contenido no tiene lugar.* Por ejemplo,

significa "A no tiene lugar". A esta pequeña barra vertical la llamo *barra de negación.* La parte de la barra horizontal que se encuentra a la derecha de la barra de negación es la barra del contenido de A; en contraposición, la parte que se encuentra a la izquierda de la barra de negación es la barra del contenido de la negación de A. Sin la barra de juicio no se emite aquí, como tampoco en otra parte de la conceptografía, un juicio.

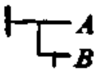


sólo invita a formar la representación de que A no tiene lugar, sin expresar si esta representación es verdadera.

Ahora consideramos un caso en el que se combinan entre sí los símbolos de condicionalidad y de negación.



significa: "el caso en que B es de afirmar y es de negar la negación de A, no tiene lugar"; en otras palabras: "no existe la posibilidad de afirmar ambas, A y *B"; o "A* y B se excluyen mutuamente". De esta manera, quedan sólo los siguientes tres casos:
A es afirmada y B es negada; A es negada y B es afirmada; A es negada y B es negada.
De acuerdo con lo precedente, es fácil indicar qué significado tiene cada una de las tres partes de la barra horizontal que antecede a A.

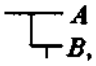


(23) significa: "no existe el caso en que A es negada y es afirmada la negación de B"; o "ambas, A y B, no pueden ser negadas". Sólo quedan las siguientes posibilidades:

A es afirmada y B es afirmada;
A es afirmada y B es negada;
A es negada y B es afirmada.

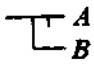
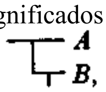
A y B agotan, juntas, todas las posibilidades. Las palabras "o" y "o. ..o", pues, se usan de dos maneras:

"A o *B"*
sólo significa, en primer lugar, lo mismo que



por tanto, que fuera de A y B nada es pensable. Por ejemplo, si se calienta una masa gaseosa, entonces aumenta su volumen o su presión. En segundo lugar, la expresión

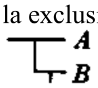
"A o *B"*
aúna los significados de

 *y* 

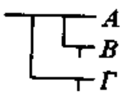
de modo que, en primer lugar, fuera de A y B no hay tercera posibilidad, y que, en segundo lugar, A y B se excluyen. De las cuatro posibilidades, pues, sólo quedan las dos siguientes:

A es afirmada y B es negada;
A es negada y B es afirmada.

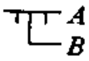
De las dos maneras de usar la expresión "A o B", la primera, según la cual la coexistencia de A y B no se excluye, es la más importante y *nosotros utilizaremos la palabra "o" en este sentido.* Quizá es apropiado hacer la distinción entre "o" y "o.. .o", de modo que sólo la última tiene el significado secundario de la exclusión mutua. Por tanto, podemos traducir



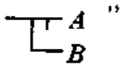
(24) por "A o B". Asimismo,



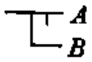
tiene el significado de *"A o B o Γ".*



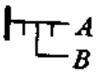
significa: "se niega



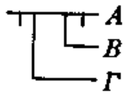
o "ocurre el caso en que ambas, A y B, son afirmadas". En cambio, las tres posibilidades que quedan según



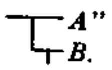
se excluyen. Según esto,



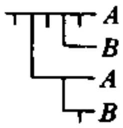
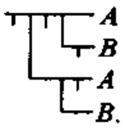
se puede traducir: "ambas, A y B, son hechos". Fácilmente se ve también que



se puede trasladar por "A y B y Γ ″ Si se quiere representar en símbolos "o A o *B*″, con el significado secundario de la exclusión mutua, entonces se debe expresar

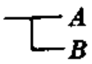
 y 

Esto produce

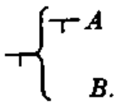
 o también 

(25) En lugar de expresar, como aquí sucede, el "y" por medio de símbolos de condicionalidad y de negación, se podría también, a la inversa, representar la condicionalidad por medio de un símbolo para "y" y el símbolo de negación. Se podría introducir, digamos,

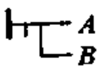
como símbolo para el contenido total de Γ y Δ [d], y reproducir, por tanto,



por medio de



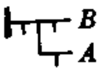
He preferido la otra manera,porque me parece que así se expresa más sencillamente la inferencia. La distinción entre "y" y "pero" es del tipo que no cobra expresión en esta conceptografía. El parlante utiliza "pero" cuando quiere ofrecer una indicación de que lo que sigue es distinto de lo que se podría suponer de inmediato.



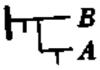
significa: "ocurre la tercera de las cuatro posibilidades, a saber, que A se niega y B se afirma". Por tanto, se podría traducir:

"B y (pero) no A tiene lugar".

La combinación de símbolos



se podría traducir por lo mismo.



(26) significa: "ocurre el caso en que ambas, *A y B,* se niegan". Por tanto, se puede traducir:

"ni A ni B es un hecho".

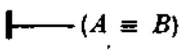
Las palabras: "o", "y", "ni. . .ni", sólo entran aquí en consideración, por supuesto, en tanto que unan *contenidos judicables.*

LA IGUALDAD DE CONTENIDO

§ 8. La igualdad de contenido se distingue de la condicionalidad y la negación en que se refiere a nombres, no a contenidos. Además, mientras los símbolos son meramente representantes de sus contenidos, de manera que toda combinación en la que aparecen expresa sólo una relación de sus contenidos, de pronto se muestran ellos mismos cuando se combinan por medio del símbolo de la igualdad de contenido; pues, con ello, se expresa la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido. Por tanto, al introducir un símbolo para la igualdad de contenido, necesariamente se produce una disociación en el significado de todos los símbolos, ya que tan pronto están en vez de su contenido, tan pronto en vez de sí mismos. Lo primero que esto despierta es la impresión de que aquí se trata de algo que corresponde a la *expresión* solamente, no *al pensamiento,* y de que en manera alguna se requieren símbolos diferentes para el mismo contenido y, por tanto, tampoco símbolo alguno para la igualdad de contenido. Para aclarar la inefectividad de esta apariencia, elijo el siguiente ejemplo tomado de la geometría. En una circunferencia hay un punto fijo A, alrededor del cual se hace girar un rayo. Cuando éste forma un diámetro, llamamos al extremo opuesto a A el punto B asociado a esta posición del rayo. Además, luego llamamos al punto de intersección de ambas líneas el punto *B* asociado a la posición del rayo en cada caso, que se produce a partir de la regla de que a variaciones continuas de la posición del rayo, deben corresponder siempre variaciones continuas de la posición de *B.* Por tanto, el nombre *B* significa algo indeterminado, mientras no se especifique la posición asociada del rayo. Así, se puede preguntar: ¿a qué punto se asocia la posición del rayo cuando éste es perpendicular al diámetro? La respuesta será: al punto A. Por tanto, en este caso, el nombre B tiene el mismo contenido que el nombre A; y, sin embargo, no se podría usar de antemano un solo nombre, (27) ya que primordialmente la justificación de éste se da a través de la respuesta. El mismo punto se determina de dos maneras:

1. inmediatamente, por la intuición,
2. como punto B asociado al rayo perpendicular al diámetro.

A cada uno de estos dos modos de determinación, corresponde un nombre particular. La necesidad de un símbolo para la igualdad de contenido se funda, por tanto, en lo siguiente: el mismo contenido se puede determinar plenamente de diferentes modos; pero que en un caso particular se ve realmente *lo mismo* por medio de *dos maneras de determinarlo,* es el contenido de un *juicio.* Antes de hacer éste, se deben asignar dos nombres distintos correspondientes a ambos modos de determinación, a lo determinado por ellos. Para su expresión, el juicio requiere, empero, un símbolo de la igualdad de contenido que conecte estos dos nombres. De aquí resulta que los nombres distintos para el mismo contenido no siempre son meramente una ociosa cuestión de forma, sino que atañen a la naturaleza del asunto cuando se conectan con diferentes modos de determinación. En este caso, el juicio que tiene por objeto la igualdad de contenido es sintético en sentido kantiano. Una razón más extrínseca para introducir un símbolo de la igualdad de contenido, consiste en que, a veces, es conveniente introducir una abreviación en lugar de una expresión extensa. De esta manera, se tiene que introducir la igualdad de contenido de la abreviatura y la forma original.



signifique, pues, que *el símbolo A y el símbolo B tienen el mismo contenido conceptual, de modo que, en cualquier caso, se puede poner* B *en lugar de A.*

LA FUNCIÓN

§ 9. Si, expresada en nuestro lenguaje de fórmulas, pensamos la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico, entonces en el lugar del símbolo del hidrógeno podemos poner el símbolo del oxígeno o del nitrógeno. Al hacer esto, se cambia el sentido de manera que "oxígeno" o "nitrógeno" aparecen en la relación en la que antes estaba "hidrógeno". Al pensar de esta manera una expresión variable, se descompone la misma en un componente estable, que representa la totalidad de las relaciones, y el símbolo, considerado como remplazable por otros, que (28) significa el objeto que se encuentra en estas relaciones. Al primer componente lo llamo función, y al último, su argumento. Esta distinción nada tiene que ver con el contenido conceptual, sino que es cuestión de puntos de vista. Mientras que desde el punto de vista aludido antes, "hidrogeno" era el argumento y "ser mas liviano que el anhídrido carbónico" era la función, también podemos pensar el mismo contenido conceptual de modo que "anhídrido carbónico" sea el argumento, y "ser mas pesado que el hidrogeno" sea la función. Sólo necesitamos, entonces, pensar "anhídrido carbónico" como remplazable por otras representaciones, digamos, "ácido clorhídrico" o "amoníaco".

"La circunstancia de que el anhídrido carbónico es más pesado que el hidrógeno",
y
"La circunstancia de que el anhídrido carbónico es más pesado que el oxígeno",

son la misma función con distintos argumentos, si se considera "hidrógeno" y "oxígeno" como argumentos; por el contrario son distintas funciones con el mismo argumento, si como tal se considera "anhídrido carbónico".

Sirva, aun, como ejemplo, "la circunstancia de que el centro de masa del sistema solar no tiene aceleración, en el caso de que sólo actúen fuerzas internas en el sistema solar". Aquí, "sistema solar" aparece en dos lugares. Por tanto, podemos concebir esto de varias maneras como función del argumento "sistema solar"; según esto, podemos pensar "sistema solar" como remplazable por algo distinto en el primero, en el segundo, o en ambos lugares —en el último caso, empero, en los dos lugares por lo mismo. Estas tres funciones son todas distintas. La proposición de que Catón mato a Catón, muestra lo mismo. Si pensamos aquí "Catón" como rempla-zable en el primer lugar, entonces "matar a Catón" es la función: si pensamos "Catón como remplazable en el segundo lugar, entonces "ser matado por Catón" es la función; finalmente, si pensamos "Caton" como remplazable en ambos lugares, entonces "matarse a si mismo" es la función.

Ahora expresamos, en general, el asunto:

"Si *en una expresión cuyo contenido no necesita* ser *judiciable, aparece un símbolo simple* o compuesto *en uno* o más *lugares, y* si lo pensamos como *reemplazable en todos o en algunos de* estos lugares *por algo distinto, pero siempre por lo mismo, entonces a la*(29) *parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte remplazahle, su argumento".*

Puesto que, según esto, algo puede aparecer como argumento y, a la vez, en lugares tales de la función que no se le piense como remplazable, distinguimos en la función los lugares del argumento de los lugares restantes.

Se debe tener precaución de una impresión falsa, a la cual da ocasión el uso lingüístico fácilmente. Si se comparan las dos proposiciones:

"el número 20 es representable como la suma de cuatro cuadrados"
y
"todo número entero positivo es representable como la suma de cuatro cuadrados",

entonces parece ser posible concebir como función "ser representable como la suma de cuatro cuadrados", la cual tiene una vez como argumento "el número 20", y otra vez "todo número entero positivo". Se reconoce el error de esta concepción al advertir que "el número 20" y "todo número entero positivo" no son conceptos de la misma clase. Lo que se puede predicar del número 20, no se puede predicar, en el mismo sentido, de "todo número entero positivo", aunque, ciertamente, hay circunstancias en que se puede predicar de todo número entero positivo. La expresión "todo número entero positivo", por sí misma, no proporciona, como "el número 20". una representación independiente, sino que primor-dialmentc adquiere un sentido por el contexto de proposiciones. Para nosotros, carecen de importancia los distintos modos en que el mismo contenido conceptual pueda ser pensado como función de éste o de aquel argumento, mientras función y argumento estén plenamente determinados. Pero si el argumento esta indeterminado, como en el juicio:

"puedes tomar como argumento de 'ser representable como suma de cuatro cuadrados' un número entero positivo cualquiera: la proposición sigue siendo correcta", entonces la distinción entre función v argumento cobra un significado *sustantivo.* A la inversa, también se puede determinar el argumento, aunque la fincion este indeterminada. En ambos casos, la totalidad, según el contenido y no solo según el punto de vsta, se descompone en *función y argumento* de acuerdo con la contraposición entre lo *determinado* y lo *indeterminado,* o entre lo *mas* y lo *menos* determinado (30)

Si *en una función en algunos o en todos los lugares donde aparece, se piensa como remplazable un símbolo considerado hasta entonces como irremplazable,*[9] *entonces, por medio de esta concepción, se obtiene una función que tiene un argumento nuevo aparte de los que ya tuviera.* Así, por ejemplo, "la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico" se puede concebir como función de los dos argumentos, "hidrógeno" y "anhídrido carbónico".

Habitualmente, en la mente del parlante el sujeto es el argumento principal; lo que sigue en importancia aparece con frecuencia como objeto. Por opción entre formas y palabras como

activo — pasivo
más pesado — más liviano
dar — recibir,

el lenguaje tiene la libertad de hacer aparecer, a discreción, éste o aquel componente de la proposición como argumento principal, una libertad que, sin embargo, está limitada por la pobreza de léxico.

§ 10. Para expresar una función indeterminada del argumento A, hacemos seguir A, encerrada entre paréntesis, a una letra; por ejemplo:

$\Phi(A)$ [e]

Asimismo,

$\Psi(A, B)$ [f]

significa una función de dos argumentos, A y B, que no está más determinada. Aquí, los lugares de A y B en los paréntesis, representan los lugares que ocupan A y B en la función, lo mismo si éstos son únicos que si son múltiples, tanto para A como para B. *Por tanto,*

$\Psi(A, B)$

en general es distinto de

$\Psi(B, A)$

Las funciones indeterminadas de más argumentos se expresan de un modo correspondiente.

$\vdash\!\!\!\longrightarrow \Phi(A)$

(31) se puede leer: "A tiene la propiedad **Φ**". Se puede traducir

$\vdash\!\!\!\longrightarrow \Psi(A, B)$

por *"B* está en la relación **Ψ** respecto a A" o "B es resultado de una aplicación del procedimiento **Ψ** sobre el objeto A".

Puesto que en la expresión

Φ (A)

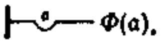
el símbolo **Φ** aparece en un lugar, y puesto que podemos pensar remplazado por otros símbolos, **Ψ**, X —con lo cual se expresarían otras funciones del argumento A—, *se puede, así concebir* **Φ (A)** *como una función del argumento* **Φ.** Resulta, de aquí, especialmente claro que el concepto de función en el análisis, al cual me he adherido en general, es mucho más limitado que el que he desarrollado aquí.

---

[9] Un símbolo pensado previamente como reemplazable. Asimismo puede ser considerado ahora como reemplazable, también en aquellos lugares en donde hasta entonces fuera considerado como fijo.

LA GENERALIDAD

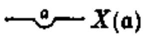
§ 11. En la expresión de un juicio se puede considerar siempre a la combinación de símbolos que está a la derecha de $\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$ como función de uno de los símbolos que ahí aparecen. *Si en el lugar de este argumento se coloca una letra gótica, y si a la barra del contenido se le hace una concavidad en la cual se pone esta misma letra, como en*



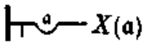
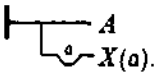
entonces esto significa el juicio de que esa función, sea lo que fuere lo que se considere como su argumento, es un hecho. Puesto que una letra utilizada como símbolo de función, digamos **Φ** en **Φ (A)**, puede ser considerada ella misma como argumento de una función, entonces en el lugar de la misma puede entrar una letra gótica, en el sentido especificado antes. El significado de una letra gótica sólo está sujeto a la limitación, comprensible de suyo, de que la judicabilidad (§2) de una combinación de símbolos que sigue a una barra de contenido ha de permanecer inafectada y de que cuando la letra gótica aparece como símbolo de función, sea tomada en cuenta esta circunstancia. *Todas las restantes condiciones a que se tiene que sujetar lo que puede ser puesto en el lugar de una letra gótica, se han de incorporar al juicio.* Por tanto, de tal juicio siempre se puede deducir una cantidad discrecional de *juicios con menor contenido general,* poniendo en el (32) lugar de la letra gótica algo distinto en cada caso, con lo cual desaparece de nuevo la concavidad en la barra del contenido. La barra horizontal que se encuentra a la izquierda de la concavidad en

es la barra del contenido para que valga **Φ** (**a**) [g] , sea lo que fuere lo que se coloca en el lugar de a; la barra horizontal que se encuentra a la derecha de la concavidad es la barra del contenido de **Φ** (a), con lo cual se puede pensar algo determinado puesto en el lugar de a.

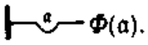
Después de lo que se dijo antes sobre el significado de la barra del contenido, es fácil ver qué significa una expresión como

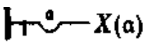


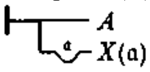
Ésta puede aparecer como parte de un juicio como

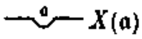
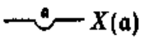
 o 

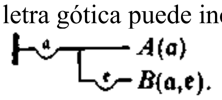
Es evidente que de estos juicios no se pueden derivar juicios menos generales, al sustituir algo determinado en el lugar de a como acontece de



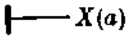
Por medio de  se niega que **X** (a) sea siempre un hecho, sea lo que fuere lo que se ponga en el lugar de a. Con ello, en manera alguna se niega que se podría dar un significado **Δ** para a, de manera que **X** (**Δ**) sea un hecho.



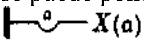
significa que el caso en que  se afirma y A se niega, no ocurre. Con ello, en manera alguna se niega que el hecho de que **X** (**Δ**) se afirma y A se niega, ocurre; asi, como hemos visto antes, **X** (**Δ**) puede ser afirmada y, sin embargo, ser negada . Por ello, tampoco se puede poner algo arbitrario en el lugar de a , sin arriesgar la justificación del juicio. Esto aclara por qué es necesaria la concavidad con la letra gótica inscrita ahi: *delimita el dominio al que se refiere la generalidad indicada por medio de la letra. Sólo dentro de su dominio mantiene* (33) *su significado la letra gótica;* en un juicio, la misma letra gótica puede aparecer en diferentes dominios sin que el significado que se adjudica en uno se extienda a los restantes. El dominio de una letra gótica puede incluir el de otra, como muestra el ejemplo:



En este caso, deben escogerse *diferentes;* no se podría poner a en lugar de e. Desde luego, está permitido sustituir una letra gótica en todo su dominio por otra determinada, siempre y cuando en los lugares donde antes estaban letras distintas, queden posteriormente también letras distintas. Esto no afecta al contenido. Se *permiten otras sustituciones cuando la concavidad sigue inmediatamente a la barra de juicio,* de manera que el contenido del juicio completo se ajuste al dominio de la letra gótica. En virtud de que este caso es muy singular, quiero introducir la siguiente abreviación. *Una letra latina tiene siempre como dominio el contenido del juicio completo,* sin que esto se tenga que señalar por medio de una concavidad en la barra del contenido. Si aparece una letra latina en una expresión a la que no preceda una barra de juicio, entonces esta expresión carece de sentido. *Una letra latina siempre puede ser sustituida por una gótica que aún no aparezca en el juicio;* al hacer esto, se coloca la concavidad inmediatamente después de la barra de juicio. Por ejemplo, en lugar de

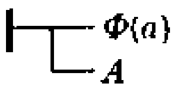


se puede poner

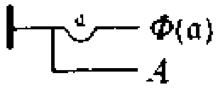


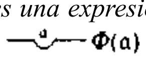
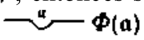
si a sólo aparece en los lugares del argumento de **X** (a).

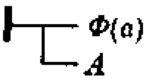
También es patente que de

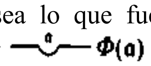


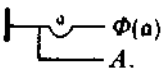
se puede derivar



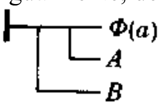
si A *es una expresión en la que a no aparece,* y si *a sólo está en el lugar del argumento de* **Φ** (*a*). Si se niega  , entonces se (34) debe indicar un significado para *a,* de manera que se niegue **Φ** (*a*) Así, si se negara  y A se afirmara, entonces se debería indicar un significado para *a,* de manera que A fuera afirmada y ***Φ*** *(a)* negada. Pero, en virtud de



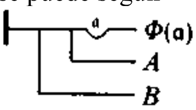
esto no se puede; pues esto significa que, sea lo que fuere *a,* se excluye el caso en que **Φ** (*a*) se niega y A se afirma. Por tanto, no se puede negar  y afirmar A; esto es,



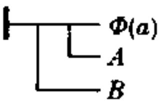
Igualmente, de



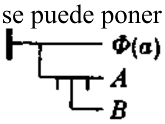
se puede seguir



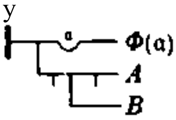
si *a* no aparece en A y B, y **Φ** (*a*) sólo contiene a *a* en el lugar del argumento. Este caso se puede reducir a los anteriores, dado que en lugar de



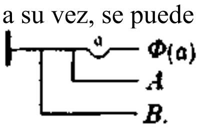
se puede poner



y

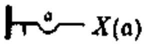


a su vez, se puede transformar en



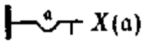
(35) Cosa semejante vale cuando están presentes aún más barras de condición.

§ 12. Consideremos ahora algunas combinaciones de símbolos.



significa que se podría encontrar algo, por ejemplo, **Δ** de manera que se negara X (**Δ**). Por tanto, se puede traducir: "Hay algunas cosas que no tienen la propiedad X".

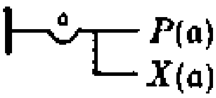
Difiere de esto el sentido de



Esta fórmula significa: "sea lo que fuere a siempre es de negar **X** (a) "; o: "no existe algo que tenga la propiedad X"; o, cuando llamamos un X a algo que tiene la propiedad X: "no existen X".

se niega por

Por tanto, esto último se puede traducir como: "existen **Δs**.[10]



significa: "sea lo que fuere que se ponga en el lugar de a , el caso de que **P** (a) debiera ser negado y **X** (a) afirmado, no ocurre". Es posible, así, que con algunos significados que se pueden dar a a ,

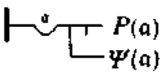
P (a) sea de afirmar y **X** (a) sea de afirmar; con otros

P (a) sea de afirmar y **X** (a) sea de negar; y aun con otros

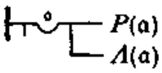
P (a) sea de negar y **X** (a) sea de negar.

Por lo pronto, se puede traducir: "si algo tiene la propiedad X, entonces también tiene la propiedad P" o "todo X es un P", o "todos los Xs son Ps".

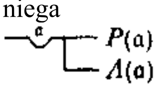
(36) *Éste es el modo en que se expresan las conexiones causales.*



significa: "a a no se puede dar un significado tal que ambas, **P** (a) y **Ψ** (a). pudieran ser afirmadas". Por tanto, se le puede traducir: "lo que tiene la propiedad **Ψ**, no tiene la propiedad **P**", o "ningún **Ψ** es un **P**"



niega

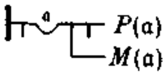


y, por tanto, se puede trasladar por "algunos **Δs** no son **Ps**".

---

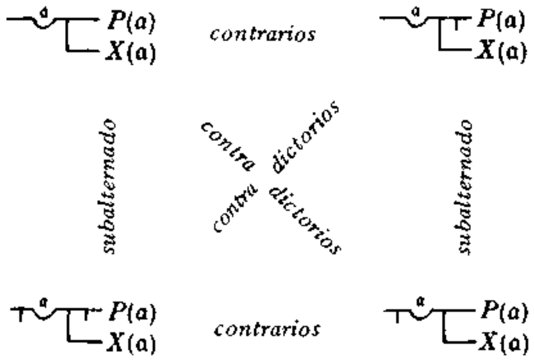
[10] Esto es de entenderse así: que incluye el caso "hay un **Δ** ". Por ejemplo, si **Δ** ***(x)*** significa la circunstancia de que ***x*** es una casa, entonces

dice "hay casas o al menos una casa". Véase §2, nota 5.



niega que ningún **M** sea **P** y, por tanto, significa que "algunos [11] **Ms** son **Ps**"; o "es posible que un **M** sea **P**".

Así, se obtiene el cuadrado de oposición lógica:



(37)

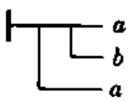
II. REPRESENTACIÓN Y DEDUCCIÓN DE ALGUNOS JUICIOS DEL PENSAMIENTO PURO

§ 13. Ya en la primera sección se presentaron algunos de los principios fundamentales del pensamiento, con el objeto de transformarlos en reglas para la aplicación de nuestros símbolos. Estas reglas y las leyes, de las cuales son imágenes, no pueden ser expresadas en la conceptografía porque están en su base. En esta sección se han de presentar en símbolos algunos juicios del pensamiento puro, por los cuales es éste posible. Parece natural derivar los más complicados de estos juicios de los más simples, no para hacerlos más ciertos, lo cual generalmente sería innecesario, sino para hacer resaltar las relaciones de los juicios entre sí. Es patente que no es lo mismo conocer meramente las leyes que conocer también cómo se compadecen unas con otras. De esta manera, se obtiene un pequeño número de leyes en las cuales, si se aceptan las contenidas en las reglas, se incluye el contenido de todas, aunque no desarrollado. También es una ventaja del modo deductivo de presentación el que enseñe a conocer ese núcleo. Puesto que de la inabarcable cantidad de leyes formulables no se puede enumerar todas, entonces no se alcanzará la totalidad, como no sea buscando aquellas que, *por su juerza,* contengan en sí a todas. Aunque, ciertamente, se debe admitir que la reducción no sólo es posible de este modo. De aquí que no todas las relaciones de las leyes del pensamiento se pongan en claro por medio de tal modo de presentación. Tal vez haya aún otra serie de juicios de los que, en todo caso, con la aceptación de aquellos contenidos en las reglas, se podría deducir toda ley del pensar. De cualquier manera, con el modo de reducción ofrecido aquí se explica tal cantidad de relaciones que cualquier otra derivación se facilitará mucho.

Nueve es el número de proposiciones que constituyen el número de la siguiente presentación. Para la expresión de tres de éstas, las fórmulas (1), (2) y (8). se requiere, aparte de las letras, sólo del símbolo de condicionalidad; tres, las fórmulas (28), (31) y (41), contienen, además, el símbolo de negación; dos, las fórmulas (52) y (54), el de igualdad de contenido, y en una, en la fórmula (58), aparece en uso la concavidad de la barra del contenido.

La siguiente derivación resultaría cansada para el lector si quisiera seguirla en todas sus particularidades; la derivación sólo tiene el propósito de disponer la respuesta para cualquier pregunta sobre la deducción de una ley. (38)

§ 14.


(1)

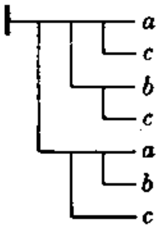
dice: "se excluye el caso en que *a* sea negada, *b* afirmada y *a* afirmada". Esto es evidente, puesto que *a* no

[11] La palabra "algunos" es de entenderse siempre así: que incluye el caso "un". Más explícitamente, se diría: "algunos o al menos uno".

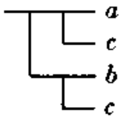
puede ser negada y afirmada a la vez. Verbalmente, el juicio también se puede expresar así: "si una proposición *a* vale, entonces también vale en caso de que una proposición cualquiera, *b,* valga". Por ejemplo, sea que: *a* signifique la proposición de que la suma de los ángulos en el triángulo *ABC,* asciende a dos rectos; y *b* la proposición de que el ángulo *ABC* es recto. Obtenemos, entonces, el juicio: "si la suma de los ángulos en el triángulo *ABC* asciende a dos rectos, entonces esto vale también en el caso de que el ángulo *ABC* sea recto".

El (1) a la derecha de

es el número de esta fórmula.



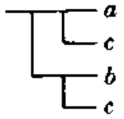
significa: "el caso en que (2)

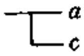
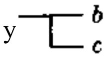
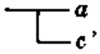


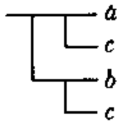
(39) se niega y

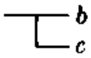
se afirma, no tiene lugar". Pero

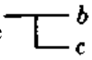
significa la circunstancia de que se excluye el caso en que *a* se niega, *b* se afirma y c se afirma. La negación de



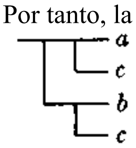
dice que  se niega y  se afirma. Pero la negación de , significa que *a* se niega y *c* se afirma. La negación de



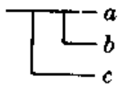
significa, pues, que *a* se niega, c se afirma y  se afirma.

La afirmación de  y *c,* empero, implica la afirmación de *b.*

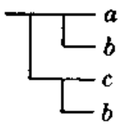
Por tanto, la negación de



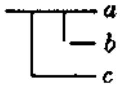
(40) tiene como consecuencia la negación de *a* y la afirmación de *b* y *c.* Precisamente, la afirmación de



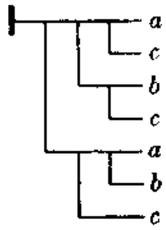
excluye a este caso. Así, no puede tener lugar el caso en que



se niegue, y

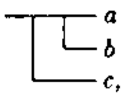


se afirme, y esto asevera el juicio



En caso de que se presenten conexiones causales, esto se puede expresar también así:

> "si una proposición *(a)* es consecuencia necesaria de dos proposiciones *(b* y *c),* esto es, si



y si una de ellas, *(b).* es a su vez consecuencia necesaria de otra, (c), entonces la proposición *(a),* es la consecuencia necesaria de esta última, *(c),* sola". (41)

Por ejemplo, sea que

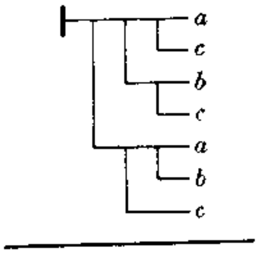
> *c* signifique que en una serie numérica, Z, cada término sucesor
> es mayor que el predecesor;
> *b* signifique que un término M es mayor que *L.*
> *a* signifique que el termino N es mayor que L.

Así, obtenemos el siguiente juicio:

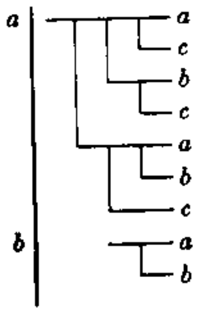
> "si de las proposiciones de que en la serie numérica Z cada término sucesor es mayor que el predecesor y de que el término M es mayor que L, se puede inferir que el término **N** es mayor que L, y si de las proposiciones de que en la serie numérica Z, cada término sucesor es mayor que el predecesor, se sigue que M es mayor que L, entonces la proposición de que N es mayor que L se puede inferir de la proposición de que cada termino sucesor en la serie numérica Z es mayor que el predecesor."

§ 15.

2



(1):

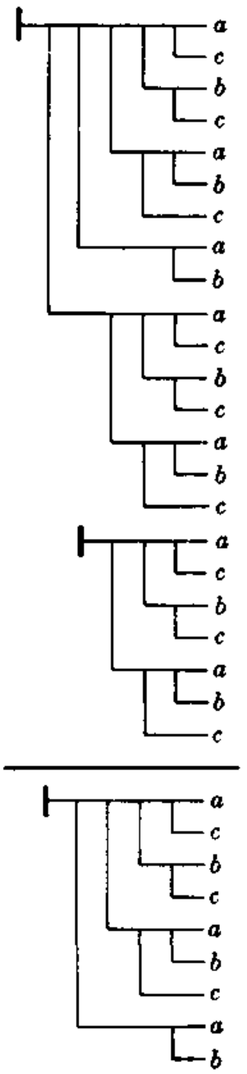


(3)

(42) El 2 a la izquierda significa que la fórmula (2) está a su derecha. La inferencia que se efectúa pasando de (2) y (1) a (3), se abrevia, de acuerdo con el §6. Detalladamente, se escribiría así:

1

2

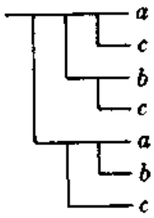


(3)

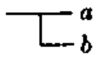
(43) La pequeña tabla que aparece bajo el (1), sirve para hacer más fácilmente reconocible la proposición

(1) en la forma más desarrollada con que aquí aparece. Establece que en

se ha de, poner

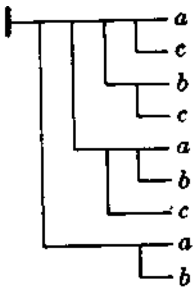


en el lugar de *a,* y

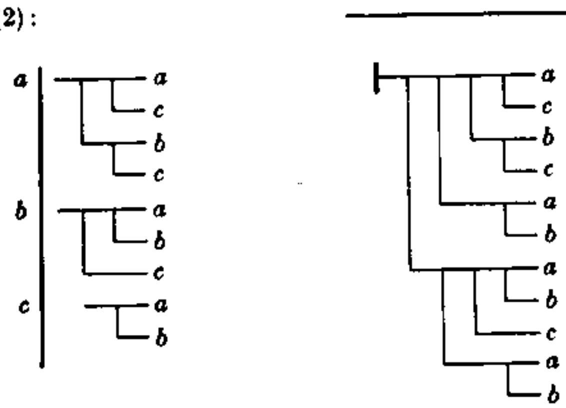


en el lugar de *b.*

(3)

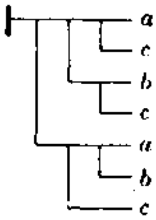


(2):



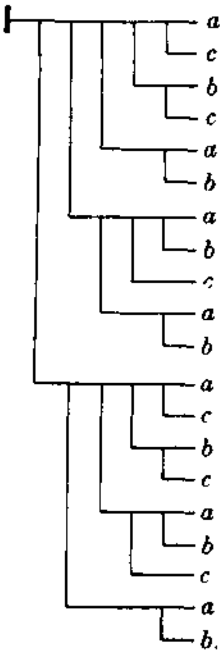
(4).

(44) La tabla bajo (2) significa que en

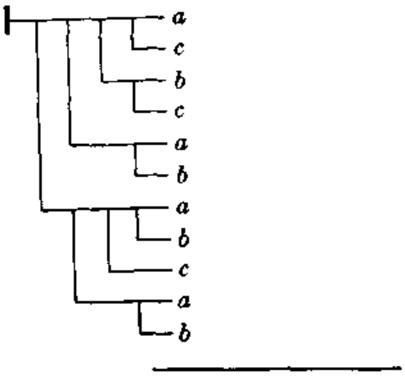


(4)

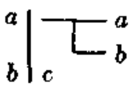
en los lugares de *a, b, c,* se deben poner las expresiones que se encuentran a la derecha de ellas, con lo cual se obtiene

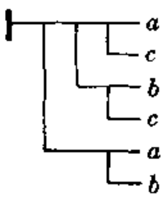


(45) Fácilmente se ve cómo (4) se sigue de esto y de (3).



(1) : :





(5)

El significado de los dobles puntos se explica en el §6. Ejemplo para (5). Sea

a la circunstancia de que la pieza de acero E se magnetiza;
b la circunstancia de que por el alambre D fluye una corriente galvánica:
c la circunstancia de que se oprime la llave T.

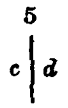
Así, obtenemos el juicio:

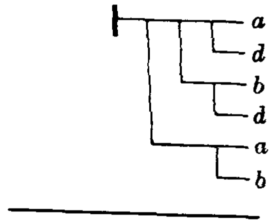
"si vale la proposición de que E se magnetiza tan pronto fluye una corriente galvánica por D;
y si vale la proposición de que fluye una corriente galvánica por D tan pronto se oprime T:
entonces, E se magnetiza si se oprime T".

Si se presuponen conexiones causales, entonces (5) se puede expresar así:

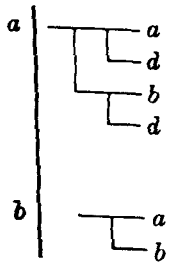
"si *b* es una condición suficiente para *a,* si c es una condición suficiente para *b,* entonces *c* es una condición suficiente para *a".*

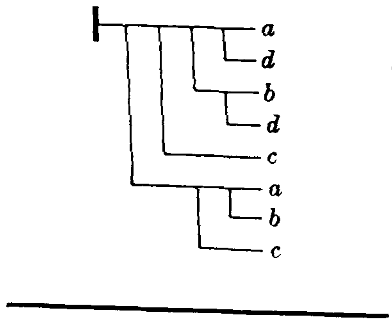
(46)



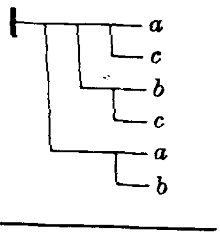


(5) :

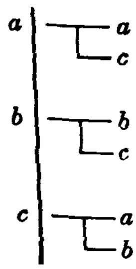


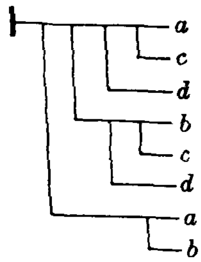


(6)



(6) :





(7)

Esta proposición sólo se distingue de (5) en que en lugar de la condición ***c***, aparecen dos, ***c*** y ***d***

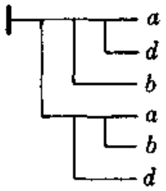
Ejemplo para (7). Sea que

d signifique la circunstancia de que el émbolo ***K*** de una bomba (47) de aire se mueve de su posición extrema izquierda a su posición extrema derecha;
c signifique la circunstancia de que la válvula **H** se encuentra en la posición I;
b signifique la circunstancia de que la densidad **D** del aire en el recipiente de la bomba de aire se reduce a la mitad;
a signifique la circunstancia de que la altura **H** del registro del barómetro conectado con el interior de la bomba de aire desciende a la mitad.

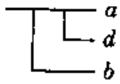
Así, obtenemos el juicio:

- "si vale la proposición de que la altura **H** del barómetro desciende a la mitad, tan pronto se reduce a la mitad la densidad **D** del aire;
- y si vale la proposición de que la densidad **D** del aire desciende a la mitad, si el émbolo ***K*** se mueve de la posición extrema izquierda a la posición extrema derecha, y si la válvula **H** se encuentra en la posición **I**:
  se sigue
- que la altura **H** del registro del barómetro desciende a la mitad, si el émbolo ***K*** se mueve de la posición extrema izquierda a la posición extrema derecha mientras la válvula H se encuentra en la posición ***I***".

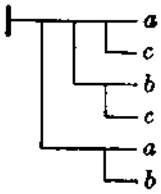
§ 16.



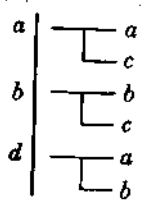
(8)

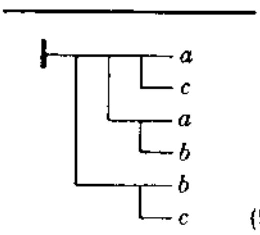
 significa que no tiene lugar el caso en que ***a*** se niegue, pero ***b*** y ***d*** se afirmen;  significa lo mismo, y (8) dice (48) que se excluye el caso en que  se niega y  se afirma. Esto también se puede expresar así: "si una proposición es consecuencia de dos condiciones, entonces es indiferente su orden".

5



(8):

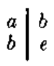


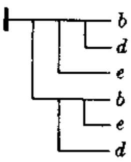


(9).

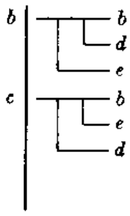
Sólo de manera no esencial se distingue esta proposición de (5).

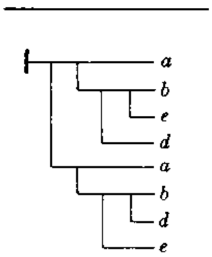
8





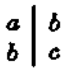
9):

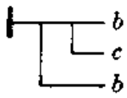




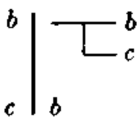
(49)

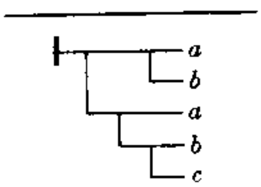
1





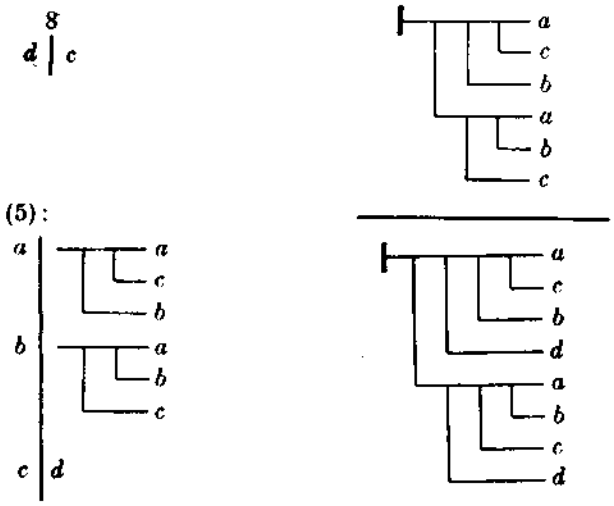
(9):





(11).

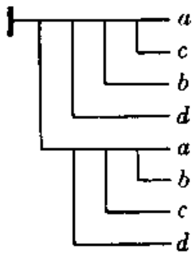
Estas fórmulas se pueden traducir así: "si la proposición de que *b* tiene lugar o *c* no tiene lugar es condición suficiente para *a,* entonces *b,* sola, es una condición suficiente para *a"*.



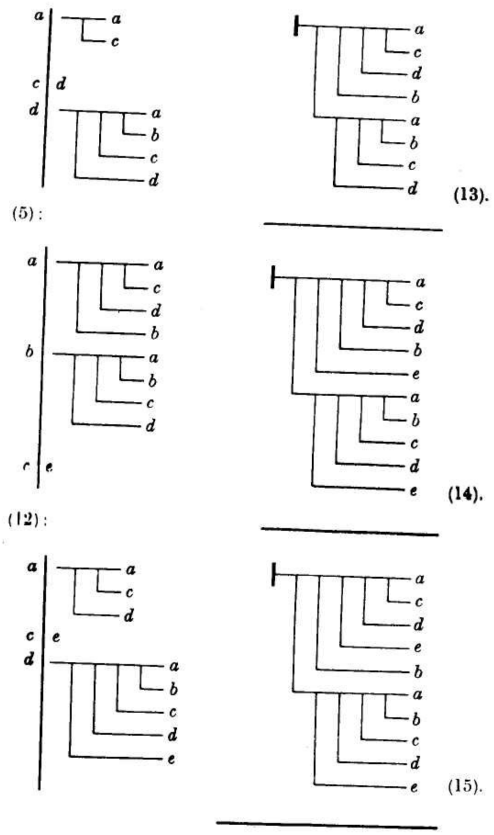
(12)

Las proposiciones (12) a (17) y la (22), muestran cómo se puede cambiar el orden cuando hay varias condiciones.

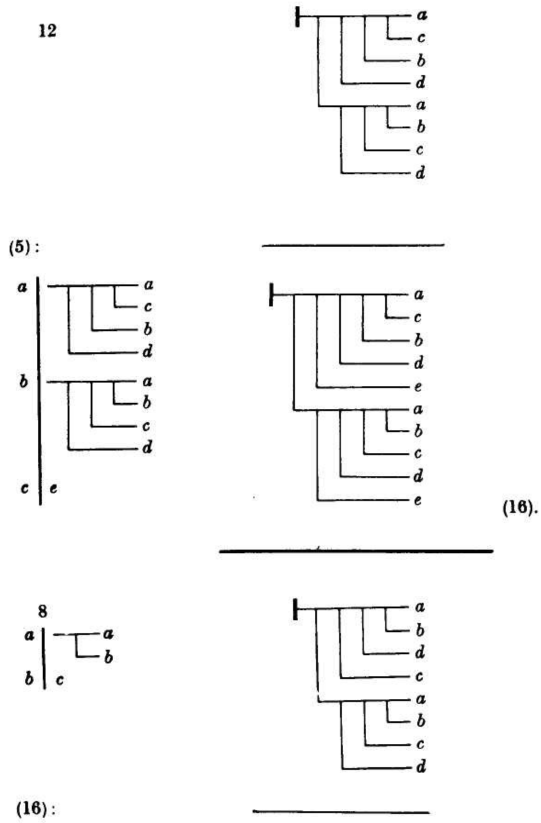
12



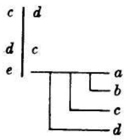
(50)

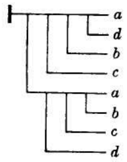


(51)



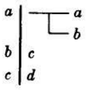
(52)

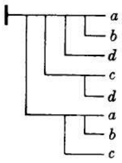




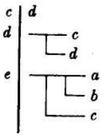
(17).

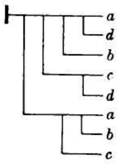
5





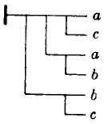
(16) :





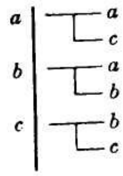
(18).

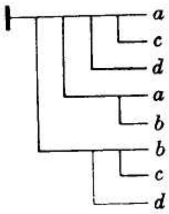
9



(53)

(18) :

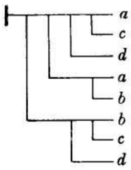




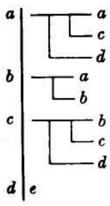
(19).

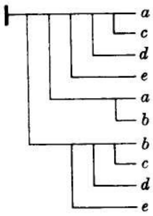
Esta proposición difiere de (7) sólo de una manera no esencial.

19



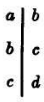
(18) :

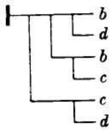




(20).

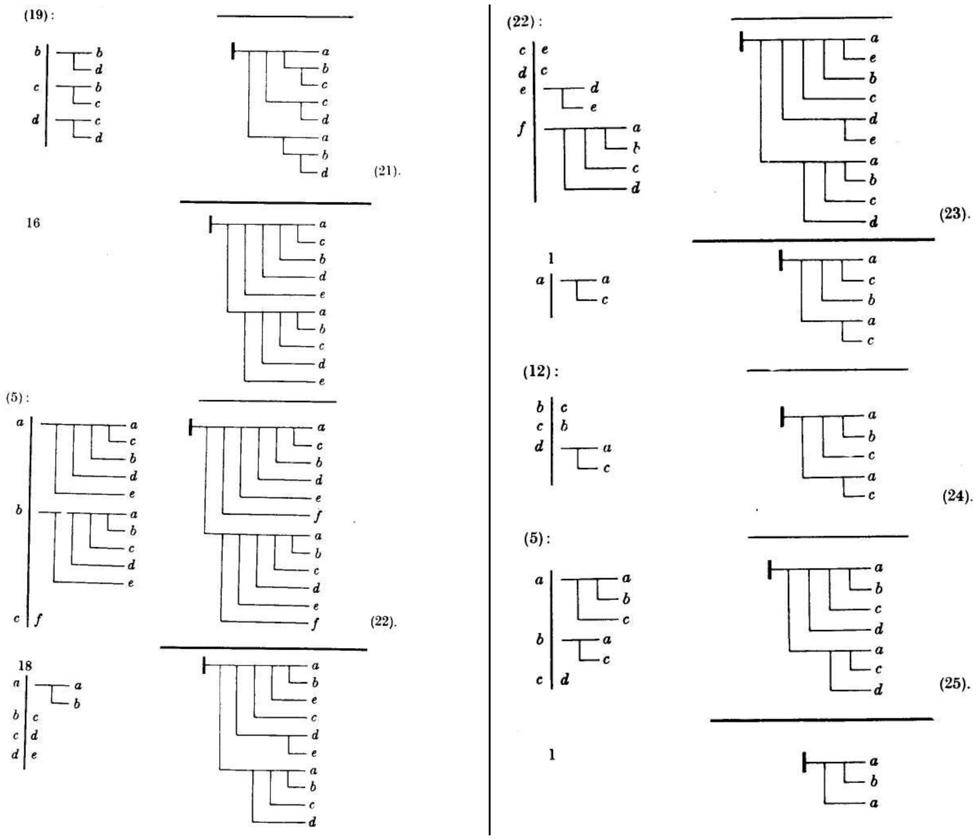
9



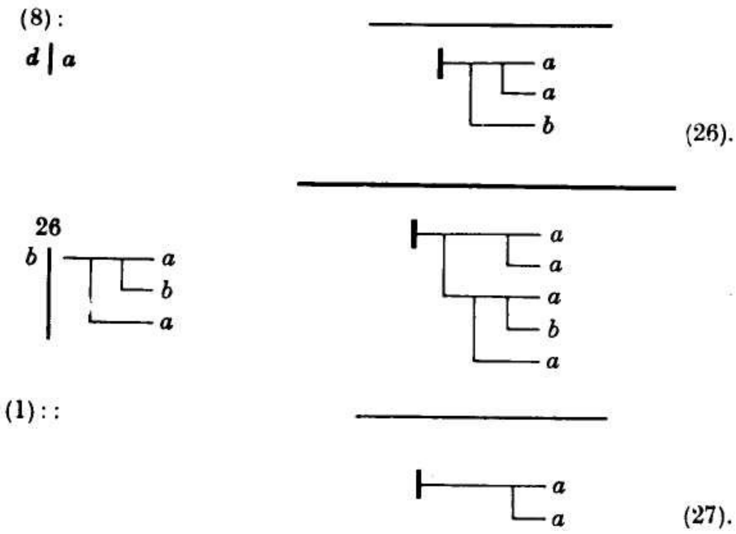


(54)

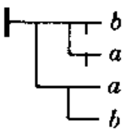
(55)

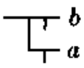
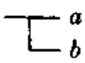
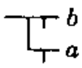


(56)



No se puede (a la vez) afirmar *a* y negar *a*.

§ 17. 

significa: "el caso en que  se niega y  se afirma, no tiene lugar". La negación de  significa que  se afirma y  se niega; es decir, que *a* se niega y *b* se afirma. Este caso se excluye por  Este juicio justifica el paso de *modus ponens* a *modus tollens.* Por ejemplo, sea que

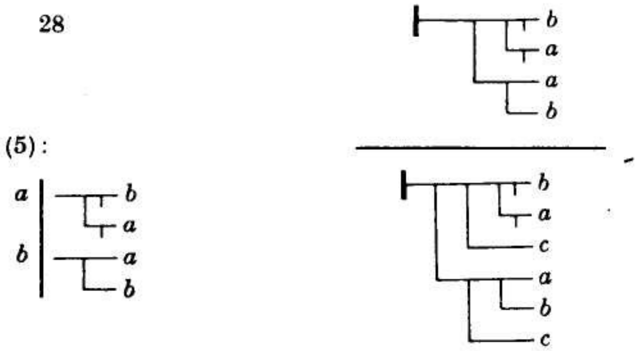
b signifique la proposición de que el hombre M vive;

a signifique la proposición de que M respira.

Así, tenemos el juicio

"si de la circunstancia de que M vive se puede inferir que respira, entonces de la circunstancia de que no respire se puede inferir su muerte". (57)

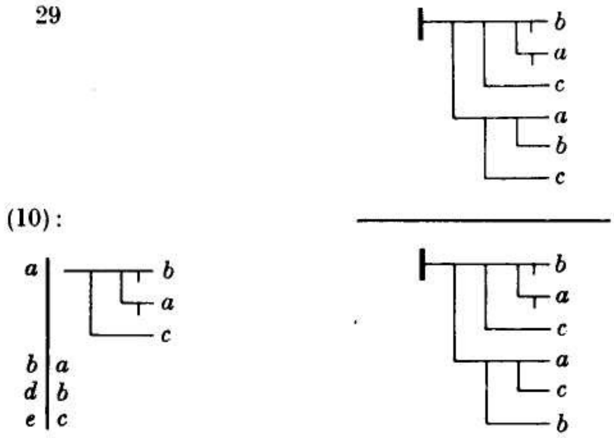
28



(29)

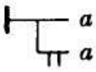
Si *b* y c son condiciones suficientes para *a,* entonces de la negación de *a* y de la afirmación de una condición *c,* se puede inferir la negación de la otra condición.

29



(30).

§ 18.

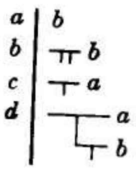


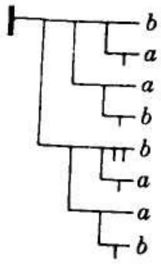
(31).

⊤⊤ *a* significa la negación de la negación, por tanto, la afirmación de *a.* Así, no se puede negar *a* y (a la vez) afirmar ⊤⊤ *a*. *Duplex negatio affirmat.* La negación de la negación es afirmación.

31

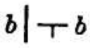
(58)

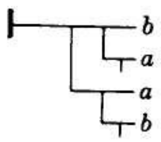




(32).

(28) : :

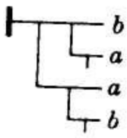




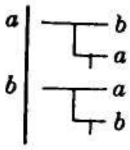
(33).

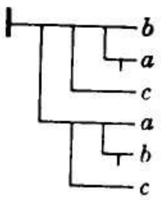
Si *a* o *b* tiene lugar, entonces *b* o *a* tiene lugar.

33



(5) :

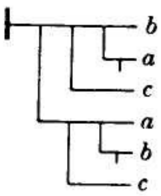




(34).

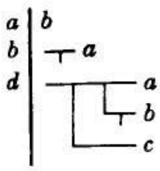
Si la aparición de la circunstancia *c,* al cesar el obstáculo *b,* tiene como consecuencia el que *a* tenga lugar, entonces de que no tenga lugar *a,* al aparecer *c,* se puede inferir la aparición del obstáculo *b.*

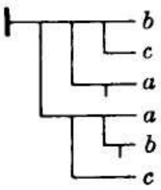
34



(12) :

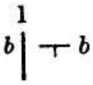
(59)

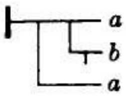




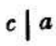
(35).

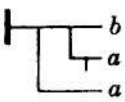
1





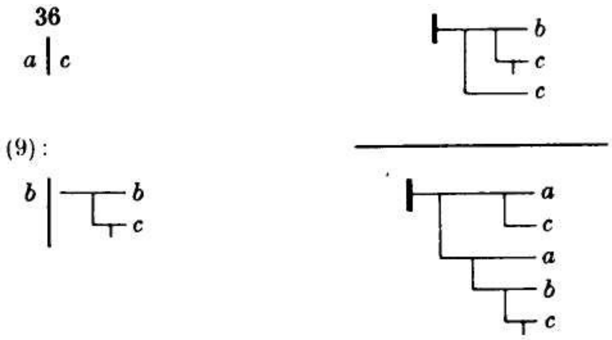
(34) :





(36).

El caso en que *b* se niega, *a* se afirma y —⊤— *a* se afirma, no ocurre. Esto se puede expresar así: "si *a* ocurre entonces tiene lugar una de ambas, *a* o *b"*.



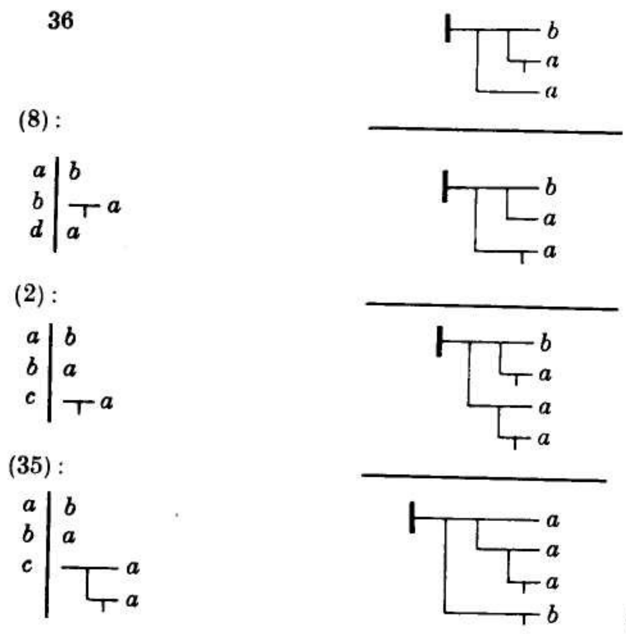
(37).

Si *a* es la consecuencia necesaria de que ocurra *b* o *c,* entonces *a* es la consecuencia necesaria de *c* sola. Por ejemplo, sea que

> *b* signifique la circunstancia de que el primer factor de un producto P es 0
> *c* signifique la circunstancia de que el segundo factor de P es 0
> *a* signifique la circunstancia de que el producto P es 0.

Así, tenemos el juicio:

"si el producto P es 0, en caso de que el primero o el segundo de los factores sea 0, entonces de la desaparición del segundo factor se puede inferir la desaparición del producto. (60)

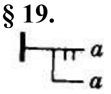


(38).

(39).

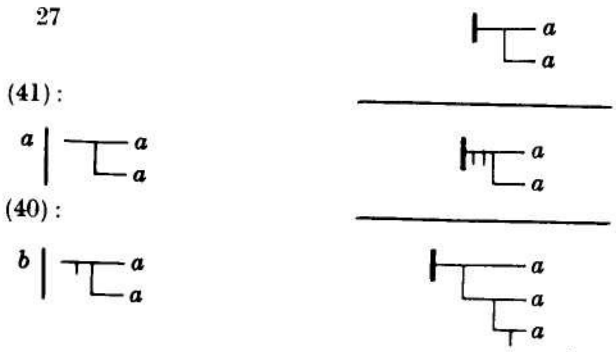
(40).

§ 19.



(41).

La afirmación de *a* niega la negación de *a.*

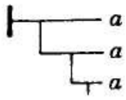


(42).

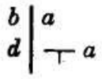
(43).

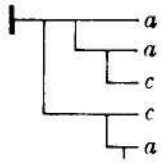
Si sólo hay opción entre *a* y *a,* entonces *a* tiene lugar. Por ejemplo, se tiene que distinguir dos casos que agotan todas las posibilidades. Al seguir la primera, se llega al resultado de que *a* tiene lugar; lo mismo si se sigue la segunda. Así, la proposición *a* vale. (61)

43



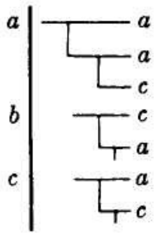
(21):

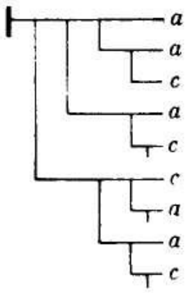




(44).

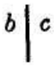
(5):

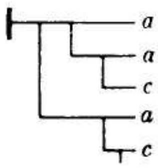




(45).

(33)::

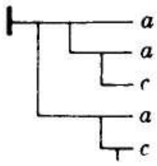




(46).

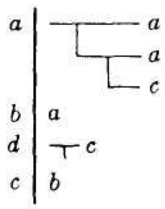
Si *a* vale tanto en el caso de que ocurra *c* como en el caso de que *c* no ocurra, entonces *a* vale. Otra expresión es: "si ocurre *a* o *c.* y si el que ocurra *c* tiene como consecuencia necesaria a *a.* entonces *a* tiene lugar".

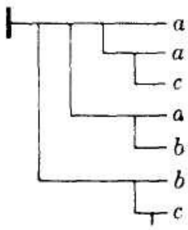
46



62

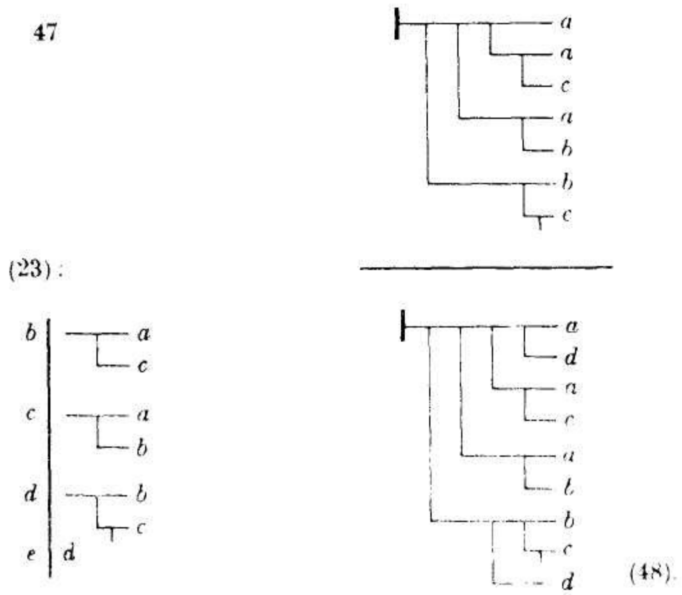
(21):



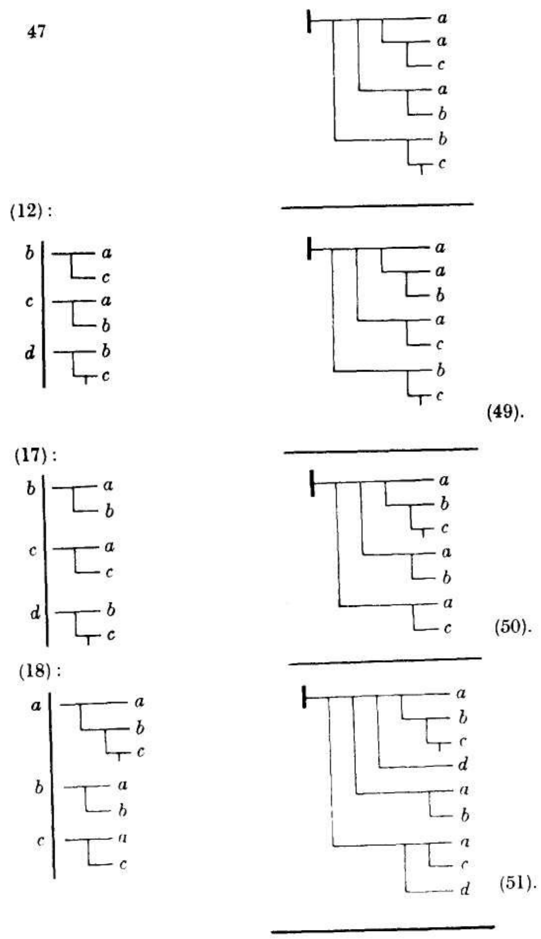


(47).

Esta proposición también se puede expresar así: "si tanto c como *b* es una condición suficiente para *a,* y si *b* o c tiene lugar, entonces la proposición *a* vale". Este juicio se aplica cuando, en una prueba, hay que distinguir dos casos. Cuando aparecen más casos, siempre se los puede reducir a dos, al considerar a uno de éstos como el primero y a la totalidad de los restantes como el segundo caso. A los últimos se les puede dividir de nuevo en dos casos, y esto se puede proseguir hasta que la división sea posible.

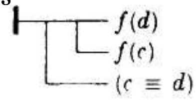


Si *d* es una condicion necesaria para que *b* o *c* tenga lugar, y si tanto *b* como *c* son condiciones suficientes para *a*, entonces *d* es una condición suficiente para *a*. Un ejemplo de una aplicación, lo ofrece la derivación de la fórmula (101) (63)



(64)

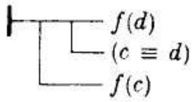
§ 20.



(52).

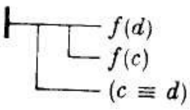
El caso en que el contenido de *c* es igual al contenido de *d*, y en que *f (c)* se afirma y *f (d)* se niega, no tiene lugar. Esta proposición expresa que en general *d* se podría poner en lugar de *c*, si $c \equiv d$. En *f (c)*, *c* también puede aparecer en otros lugares, ademas de en los del argumento. Por tanto, *c* incluso puede también estar incluida en *f (d)*.

52



(8) :

$a \mid f(d)$
$b \mid f(c)$
$d \mid (c \equiv d)$



(53).

§ 21.

$\vdash (c \equiv c)$ (54).

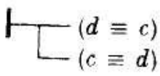
El contenido de *c* es igual al contenido de *c*.

54

$\vdash (c \equiv c)$

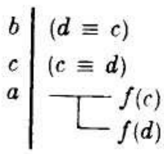
(53) :

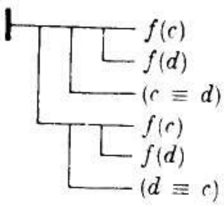
$f(A) \mid (A \equiv c)$



(55).

(9) :



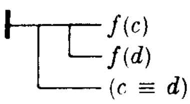


(56).

(65)

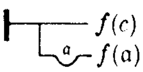
(52) : :

$d \mid c$
$c \mid d$



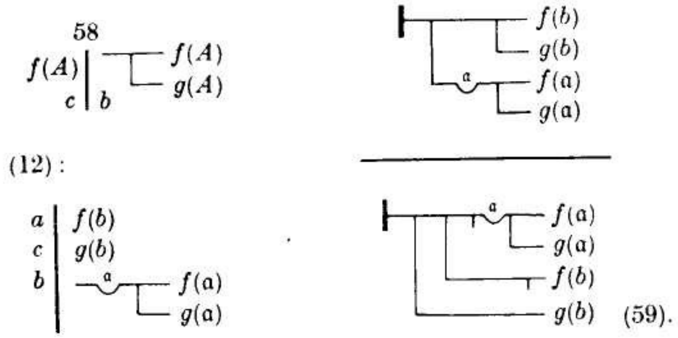
(57).

§ 22.



(58).

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})$ significa que $f(\mathfrak{a})$ tiene lugar, sea lo que fuere lo que se entienda por $\mathfrak{a}$. Por tanto, si $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})$ se afirma, entonces *f (c)* no puede ser negada. Esto expresa nuestra proposición. Aquí, $\mathfrak{a}$ sólo puede aparecer en los lugares del argumento en *f*, ya que esta función también aparece, en el juicio, fuera del dominio de a .



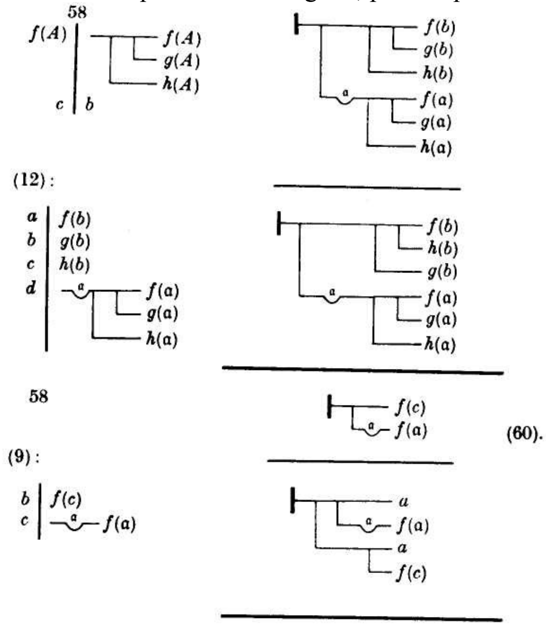
Ejemplo. Sea que

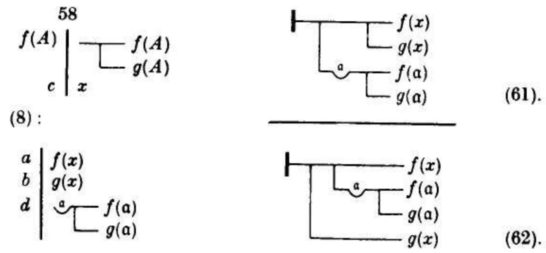
> *b* signifique un avestruz, es decir, un animal individual que pertenece a esta especie;
> *g* (A) signifique "A es un pájaro";
> *f* (A) signifique "A puede volar".

Así, tenemos el juicio:

"si este avestruz es un pájaro y no puede volar, entonces de esto se infiere que algunos pájaros no pueden volar". [12] (66)

Se ve como este juicio remplaza un modo de inferencia, a saber, Felapton o Fesapo, entre los cuales no se hace aquí distinción alguna, puesto que no se destaca un sujeto.

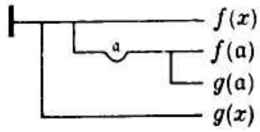




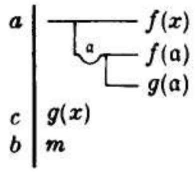
(67) Este juicio remplaza al modo de inferencia Barbara, cuando la premisa menor g (*x*) tiene un contenido particular.

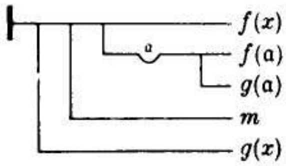
[12] Véase § 12, nota 11.

62



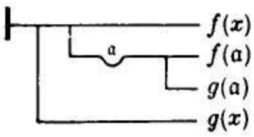
(24) :



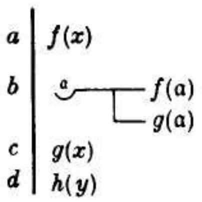


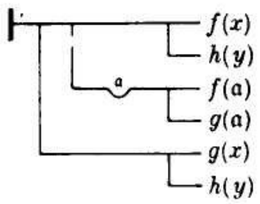
(63).

62



(18) :

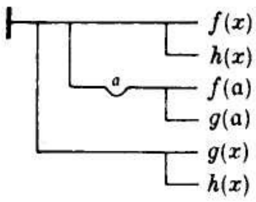




(64).

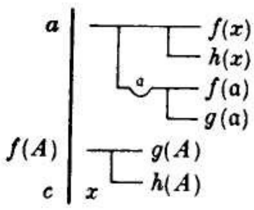
64

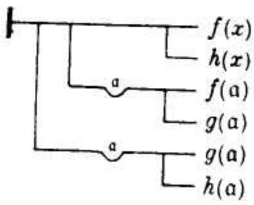
y | x



(68)

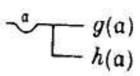
(61) :





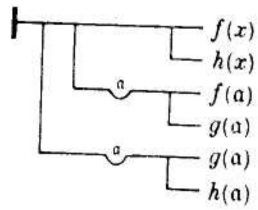
(65).

Aquí aparece **a** en dos dominios, sin que esto indique una relación especial. En el primer dominio también se podría haber escrito **e** en lugar de **a**. Este juicio remplaza al modo de inferencia Barbara, cuando la premisa menor

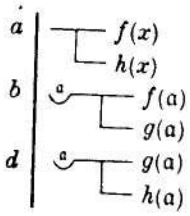


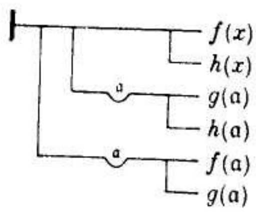
tiene un contenido universal. El lector que se haya familiarizado con el modo de derivación de esta conceptografía, estará también en posición de derivar los juicios que corresponden a otros modos de inferencia. Aquí bastan estos como ejemplos

65



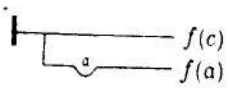
(8):





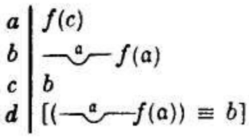
(66).

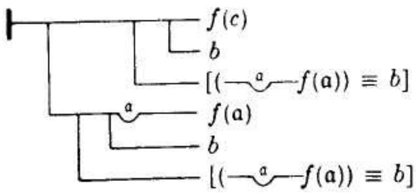
58



(69)

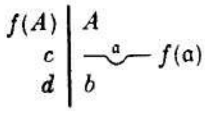
(7):

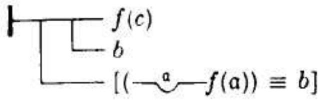




(67).

(57)::



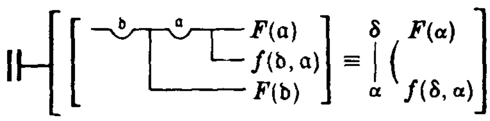


(68).

III. ALGUNAS CUESTIONES DE UNA TEORÍA GENERAL DE LAS SERIES

§23. Las siguientes derivaciones deben dar una idea general de la manipulación de esta conceptografía, aun cuando quiza no basten para hacer totalmente reconocible su utilidad. Ésta solo aparecerá con mayor claridad en proposiciones mas complicadas. Ademas, en estos ejemplos se ve cómo el pensamiento puro, que prescinde de todo contenido dado por los sentidos o incluso por una intuición *a priori,* permite —sólo del contenido que nace de su propia naturaleza— producir juicios que, a primera vista, solo parecen ser posibles con base en alguna intuición. Esto se puede comparar con la condensación por medio de la cual se logra transformar el aire, que para una conciencia infantil da la impresión de ser nada, en un flujo sensible que forma gotas. Las proposiciones sobre series desarrolladas en lo que sigue, superan en generalidad, con mucho, a todas las semejantes que se pueden derivar a partir de, cualquier intuición de series. Por tanto, si se pudiera tener por mas conveniente poner una idea intuitiva de series como base, entonces no se olvide que las proposiciones logradas de esta manera, aunque tendrían casi la misma fraseología que las que aquí se ofrecen, ni con mucho se podría decir, sin embargo, que fueran como éstas, ya que sólo tendrían validez, en el dominio preciso de la intuición en que se fundaron. (70)

§ 24

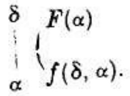


(69).

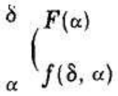
Esta proposición se distingue de las consideradas hasta ahora, en que los símbolos que aparecen en ella no han sido definidos previamente; ella misma da esta definición. No dice: "el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo", sino "debe tener el mismo contenido". Por tanto, esta proposición no es un juicio y, en consecuencia, tampoco un *juicio sintético,* para servirme de una expresión kantiana. Indico esto, porque Kant tenía por sintéticos a todos los juicios de la matemática. Así, si (69) fuera un juicio sintético, entonces habría proposiciones derivadas de él. Pero nos la podemos pasar sin la notación introducida por medio de esta proposición y, por tanto, sin ella misma como su definición: nada se sigue de ella que no se pudiera inferir sin ella. Tales definiciones sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca poí medio del establecimiento de una abreviación. Además, sirven para destacar una especial combinación de símbolos frente al todo de las combinaciones posibles y, con ello, obtener una visión más segura de la idea. De esta manera, aunque la mencionada simplificación es apenas perceptible debido al escaso número de juicios presentados aquí, sin embargo, tampoco he admitido esta fórmula con motivo de los ejemplos.

Si bien originariamente (69) no es un juicio, de inmediato se transforma en tal; ya que una vez que se ha fijado el significado de los nuevos símbolos, adquiere validez y, por tanto, la fórmula (69) vale también como juicio, pero como juicio analítico, porque sólo hace resaltar otra vez lo introducido en los nuevos símbolos. Esta dualidad de la fórmula se indica por medio de la duplicación de la barra de juicio. En referencia a las siguientes derivaciones, por tanto, (69) se puede tratar como juicio ordinario.

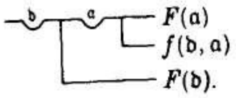
Las letras griegas minúsculas, que por primera vez aparecen aquí, no representan contenido independiente alguno, como las letras góticas y las latinas. En ellas sólo hay que atender a su igualdad o diversidad, de modo que se pueden poner cualesquiera otras letras griegas en los lugares de a y *ó,* con tan sólo ocupar con iguales letras los lugares ocupados antes con letras iguales, y siempre que no se sustituyan letras distintas por letras iguales. *Esta igualdad o diversidad de las letras griegas, empero, sólo tiene significado dentro* (71) *de la fórmula para la que se hayan introducido especialmente, como lo fueron para*



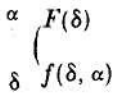
Sirven al propósito de que, de la fórmula abreviada



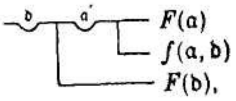
se pueda siempre reproducir la fórmula detallada



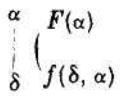
sin ambigüedad. Por ejemplo,



significa la expresión



mientras que

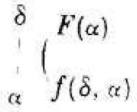


carece de sentido. Se ve que la expresión detallada, sin importar qué tan complicadas puedan ser las funcione, F y *f ,* puede ser re-encontrada siempre, excepto si hay una eleccon arbitraria de letras góticas.

$$\vdash f(\Gamma, \Delta)$$

(72) se puede trasladar por "**Δ** es resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre **Γ** *", o* por "**Γ** es el objeto de una aplicación del procedimiento *f*, cuyo resultado es **Δ**", o por "**Δ** está en la relación *f* respecto a **Γ**", o por "**Γ** está en la relación inversa a *f* respecto a **Δ**", expresiones que se han de tomar como

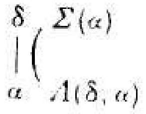
equivalentes.



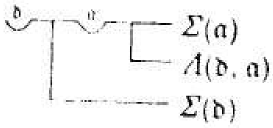
se puede traducir: "la circunstancia de que la propiedad F se hereda en la serie *f*". Quizá el siguiente ejemplo pueda hacer aceptable esta expresión. Sea que

> **Δ (M, N)** signifique la circunstancia de que N es hijo de M.
> **Σ (P)** signifique la circunstancia de que P es un hombre.

Así,



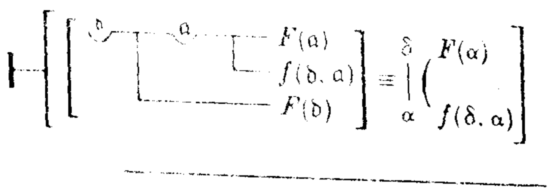
o



es la circunstancia de que cada hijo de un hombre es un hombre a su vez, o de que la propiedad de ser hombre se hereda. Inciden talmente, se ve que la reproduccion en palabras puede ser difícil y aun imposible, si en los lugares de F y *f* aparecen funciones más complicadas. Según esto, la proposición (69) se expresaría ver balmente así:

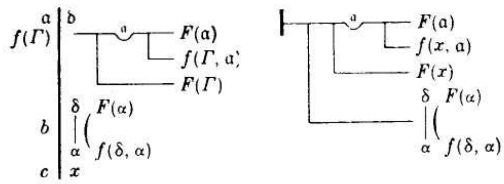
> "Si *de la proposición de que* **δ** *tiene la propiedad F, sea lo que fuere* **δ**, *se puede inferir en general que cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* **δ** *tiene la propiedad F, entonces digo:*
> *'la propiedad F se hereda en la serie f "*

§ 25.

69 

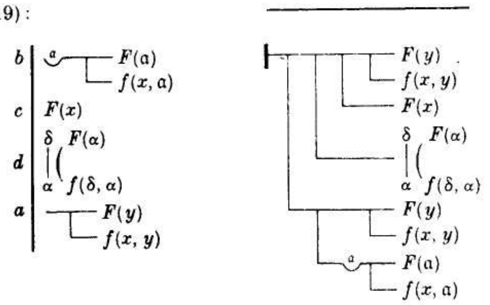
(68) :

(73)



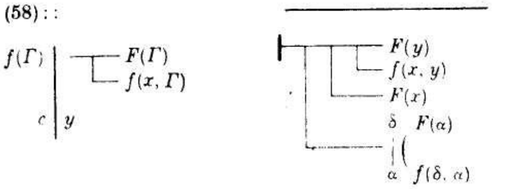
(70).

(19) :



(71).

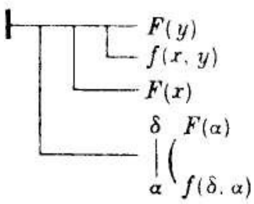
(58) : :



(72).

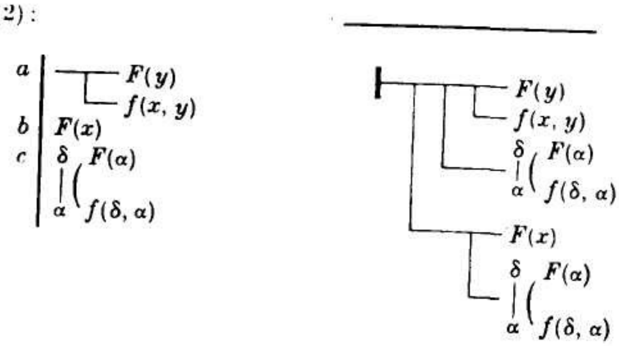
Si *la propiedad F se hereda en la serie f; si x tiene la propiedad F e* y es *resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* x: *entonces* y *tiene la propiedad F.*

72



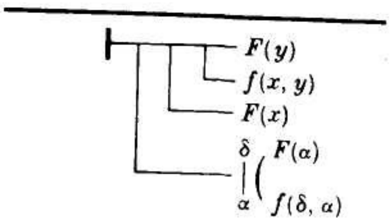
(74)

(2) :

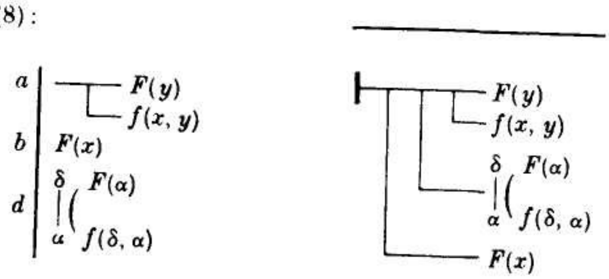


(73).

72



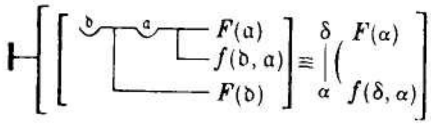
(8) :



(74).

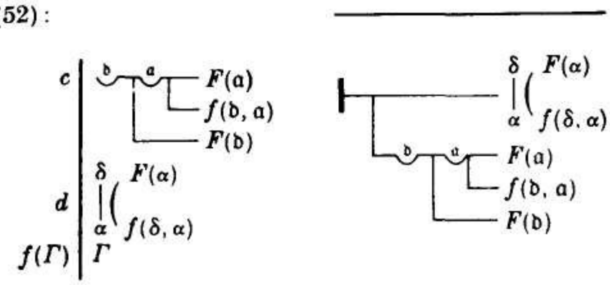
Si x tiene una propiedad F que se hereda en la serie f, entonces cada resulatdo de una aplicacion el procedimiento f sobre x tiene la propiedad F

69



(75)

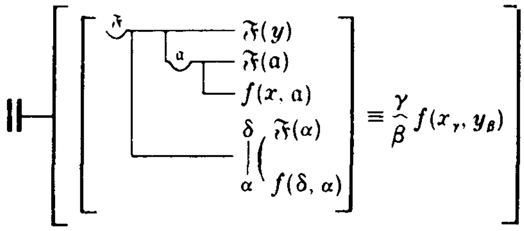
(52) :



(75).

Si de la proposición de que $\boldsymbol{\delta}$ *tiene la propiedad F, sea lo que fuere* $\boldsymbol{\delta}$*, se puede inferir que cada resultado de una aplicación del procedimiento* f *sobre* $\boldsymbol{\delta}$ *tiene la propiedad F, entonces la propiedad F se hereda en la serie f.*

§ 26



(76).

Ésta es la definición de la combinación de símbolos que está a la derecha, $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_{\gamma}, y_{\beta})$. En cuanto a la duplicación de la barra de juicio y a las letras griegas, remito al lector al §24. No procedería escribir simplemente

$$\underset{y}{\overset{x}{\smile}} f(x, y)$$

en lugar de la expresión anterior, ya que, en una función de *x* e *y* detalladamente escrita, estas letras, incluso, podrían aparecer fuera de los lugares del argumento y, entonces, no se podría ver qué lugares habría que considerar como lugares del argumento. Estos últimos, por tanto, se deben indicar como tales. Esto se hace aquí por medio de los índices γ y β. Se los debe elegir distintos en consideración al encaso que los dos argumentos fueran iguales entre sí. Adoptamos las letras griegas, además, para tener una cierta opción y en caso de que

$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_{\gamma}, y_{\beta})$$

(76) incluyera en sí una expresión estructurada similarmente, podamos elegir la notación para los lugares del argumento en la expresión incluida diferente a la de la incluyente. *La igualdad y diversidad de las letras griegas, sólo tiene significado, aquí, dentro de la expresión*

$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_{\gamma}, y_{\beta});$$

pueden aparecer las mismas letras fuera, sin que con ello se señale relación alguna con éstas.

Traducimos

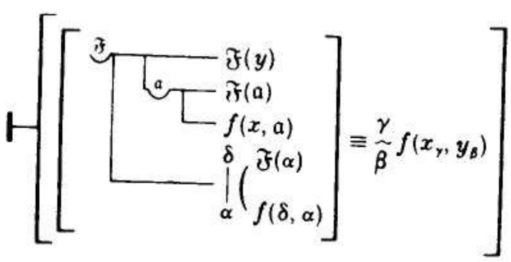
$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\smile}} f(x_{\gamma}, y_{\beta})$$

por *"y* sigue a *x* en la serie *f";* expresión que, ciertamente, sólo es posible si la función *f* está determinada. Según esto, (76) se puede expresar verbalmente así:

> *Si de ambas proposiciones, de que cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tiene la propiedad F, y de que la propiedad F se hereda en la serie f, sea lo que fuere F, se puede inferir que y tiene la propiedad F, entonces digo:*
> *"y sigue a x en la serie f";* o *"x precede a y en la serie f"* [13]

§ 27.

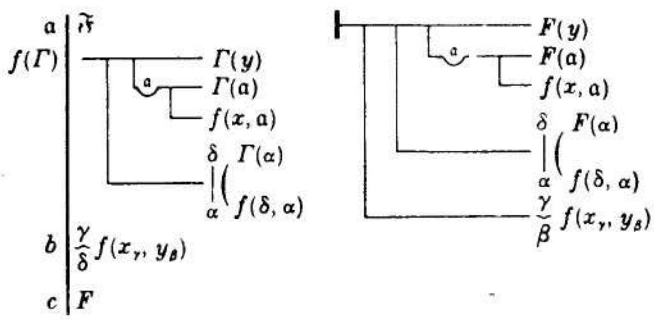
76



(77)

[13] Para hacer más clara la generalidad del concepto que se ofrece aquí para el seguirse en una serie, suscito el recuerdo de algunas posibilidades. Bajo esto no sólo se conceptúa una seriación sucesiva, como la que las perlas muestran en una sarta, sino también una ramificación como la del árbol genealógico, una unión de varias ramas tanto como un proceso circular que retorna a sí.

(68) :

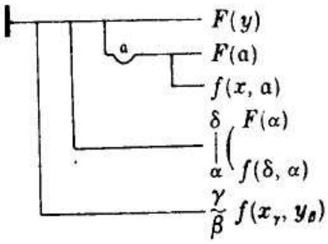


(77).

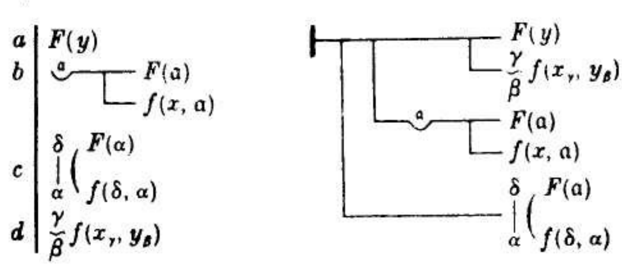
De acuerdo con el §10, hay que considerar aquí a F(y), F(a) y *F(a)* como diferentes funciones del argumento F. (77) significa:

> *Si y sigue a x en la serie f; si la propiedad F se hereda en la serie f; si cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tiene la propiedad F: entonces, y tiene la propiedad F.*

77



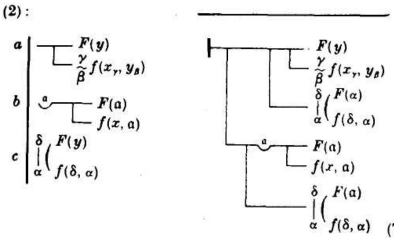
(17) :



(78).

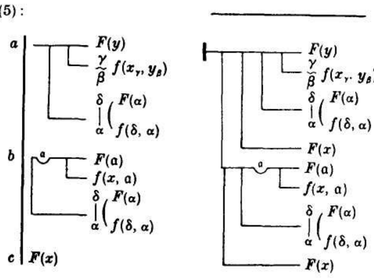
(78)

(2) :



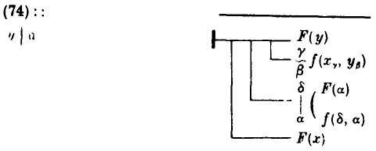
(79).

(5) :



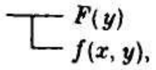
(80).

(74) : :



(81).

Puesto que en (74) y sólo aparece en



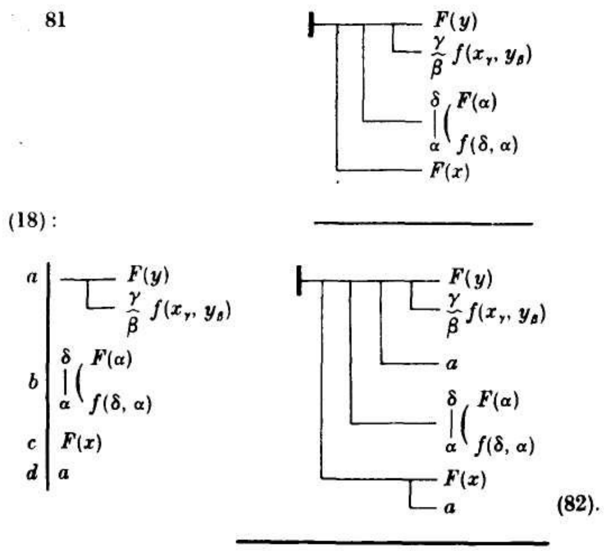
(79) entonces, según el §11, la concavidad debe preceder inmediatamente a esta expresión cuando se sustituye *y* por la letra gótica **a** (81) se puede traducir así:

> Si *x tiene una propiedad F que se hereda en la serie f, y si* y *sigue a x en la serie f, entonces y tiene la propiedad* F. [14]

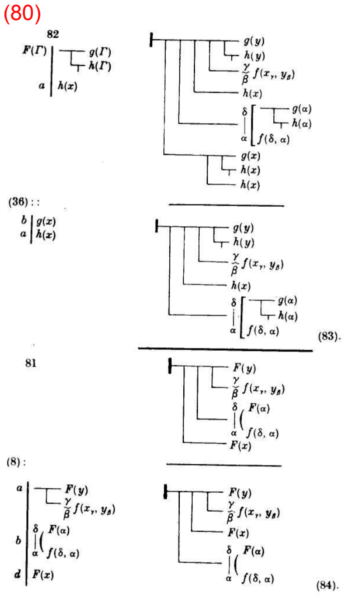
Por ejemplo, sea **F** la propiedad de ser un montón de frijoles; sea *f* el procedimiento de quitar un frijol de un montón de frijoles, de modo que

f (*a, b*)

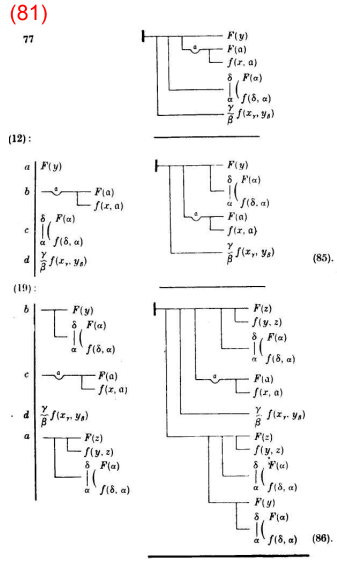
significa la circunstancia de que *b* contiene todos los frijoles del montón *a,* menos uno, y nada más. Por tanto, según nuestra proposición, se llegaría al resultado de que uno sólo o, incluso, ningún frijol es un montón de frijoles si la propiedades de ser un montón se hereda en la serie *f.* Sin embargo, en general éste no es el caso, ya que hay un cierto *z* según el cual *F* (*z*) no es judicable en virtud de la indeterminación del concepto "montón".



(80)



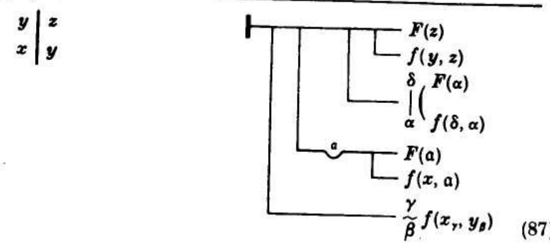
(81)



(82)

[14] En esto descansa la inducción bernoulliana.

(73) ::



(87).

Verbalmente, la derivación de esta proposición dirá aproximadamente lo siguiente:

(**α**) *y* sigue a *x* en la serie *f*;

(***β***) cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre x tiene la propiedad F;

(γ) la propiedad F se hereda en la serie *f.*

Según (85), de estos presupuestos se sigue:

(δ) *y* tiene la propiedad F.

Ahora,

(ε) sea *z* resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *y.*

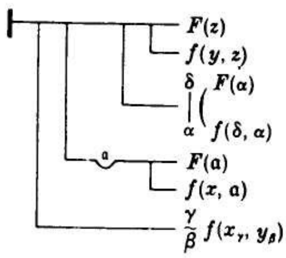
Según (72), así, de ***(γ)***, (***δ***), (*ε*), se sigue:

z tiene la propiedad *F*.

Por tanto:

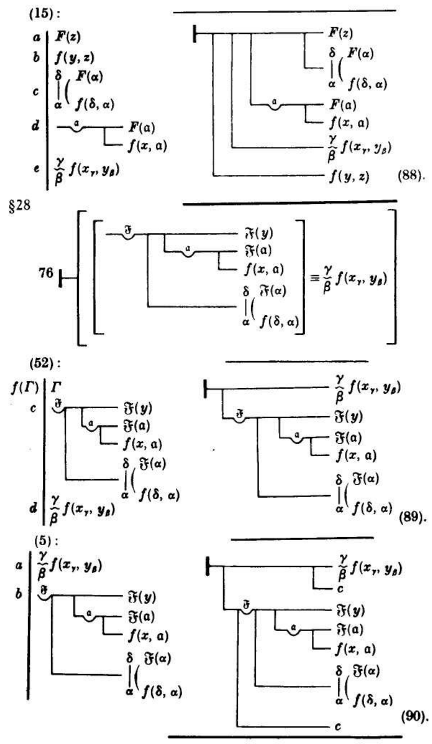
Si z es *resultado de una aplicación del procedimiento f sobre un objeto y que en la serie f sigue a x, y si cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre x tiene la propiedad F que se hereda en la serie f, entonces z tiene esta propiedad.*

87

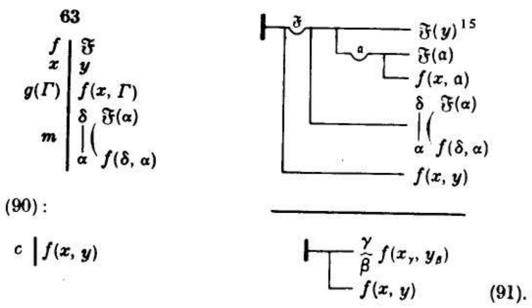


(83)

§ 28



(84)

 [15]

Demos aquí, verbalmente, la derivación de la proposición (91).

De la proposición:

(α) "cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre x tiene la propiedad $\mathfrak{F}$",

sea lo que fuere $\mathfrak{F}$, se puede inferir:

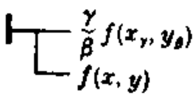
cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *x* tiene la propiedad $\mathfrak{F}$.

Por tanto, de la proposición (α) y de la proposición de que la propiedad $\mathfrak{F}$, sea lo que fuere $\mathfrak{F}$, se hereda en la serie *f*, se puede inferir también:

cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre x tiene la propiedad $\mathfrak{F}$.

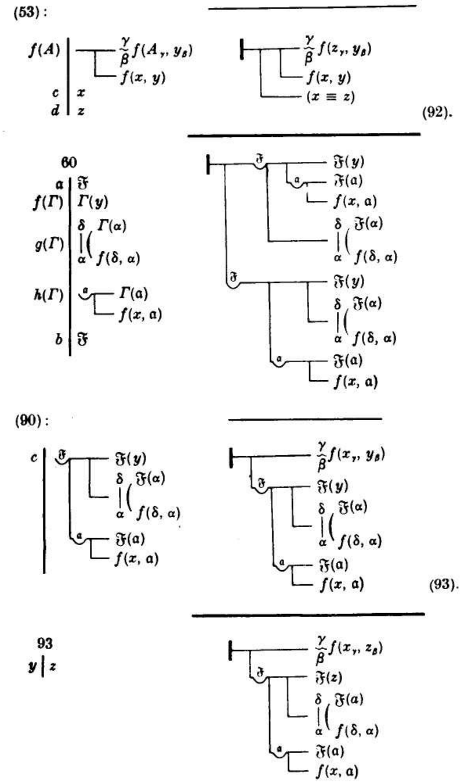
Por tanto, según (90), vale la proposición:

cada resultado de una aplicación de un procedimiento f sobre un objeto x sigue en la serie f a este x.

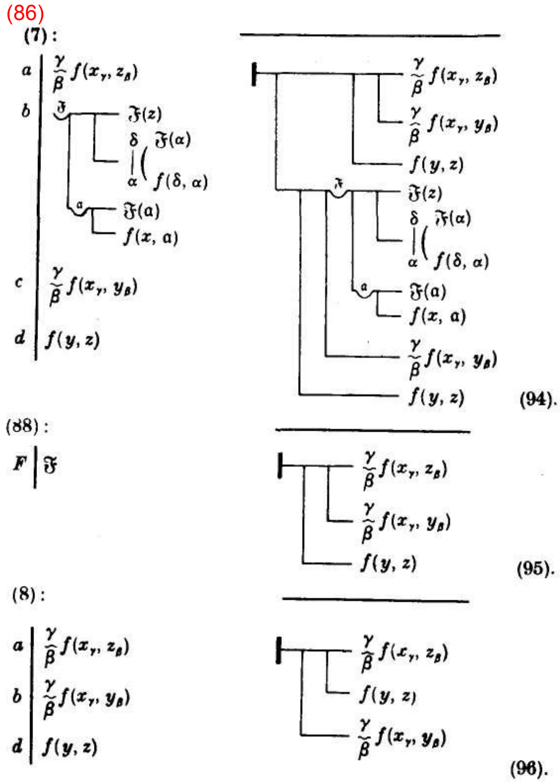
91 

[15] En referencia a la concavidad con $\mathfrak{F}$, véase §11.

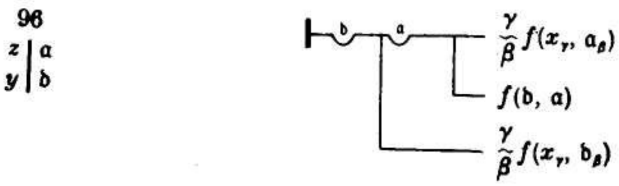
(85)



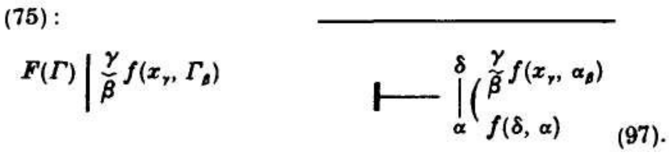
(86)



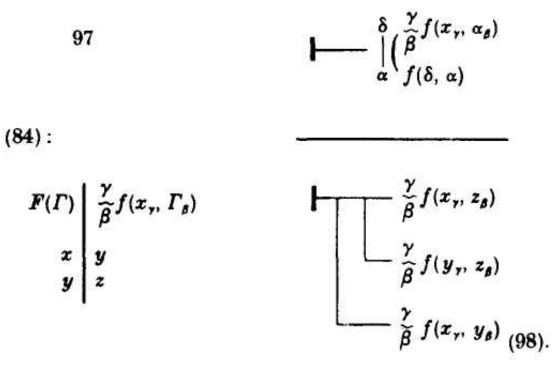
Cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre un objeto que sigue a x en la serie f, sigue a x en la serie f.



(87)

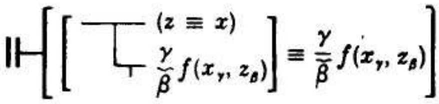


La propiedad de seguir a x en la serie f, se hereda en la serie f.



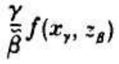
Si en la serie f y sigue a x, y si en la serie f z sigue a y, entonces z sigue a x en la serie f.

§ 29.



(99).

Remito aquí a lo dicho, en relación a las fórmulas (69) y (76), acerca de la introducción de nuevos símbolos. Se puede traducir

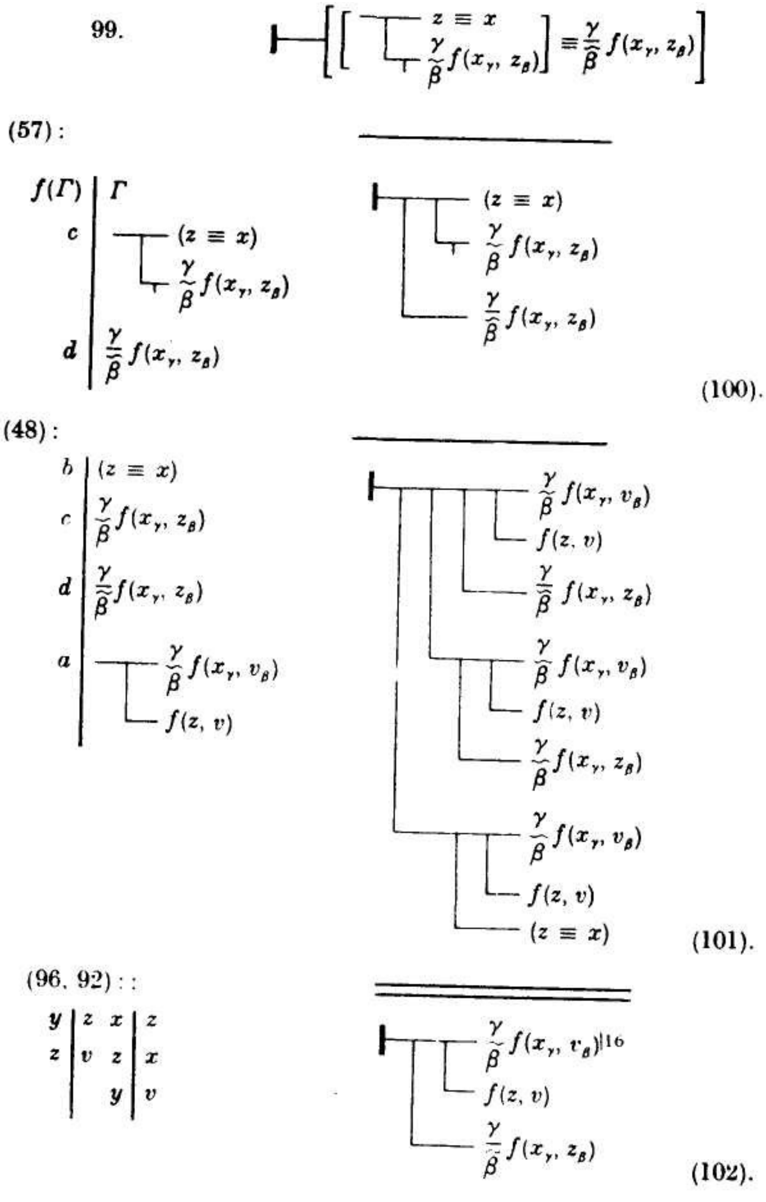


por "*z* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*", o por "*x* pertenece a la serie *f* que termina con *z*'. De esta manera, verbal-mente (99) dice así:

Si z es lo mismo que x o sigue a x en la serie f, entonces digo:

"z pertenece a la serie f que comienza con x"; o "x pertenece a la serie f que termina con z".

(88)



[16]

(89) Demos aquí, verbalmente, la derivación de (102).

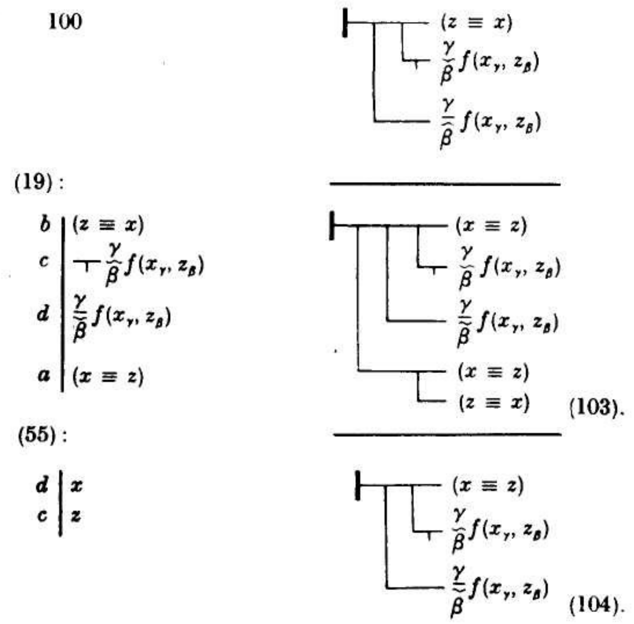
---

[16] En relación a la última inferencia, véase § 6.

Si z es lo mismo que x, entonces, según (92), cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre z, sigue a x en la serie f. Si z sigue a x en la serie f, entonces, según (96), cada resultado de una aplicación de f sobre z sigue a x en la serie f.

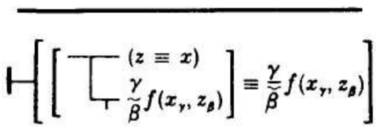
Según (100), de estas dos proposiciones se sigue:

Si *z pertenece a la serie f que comienza con x, entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre z sigue a x en la serie f.*

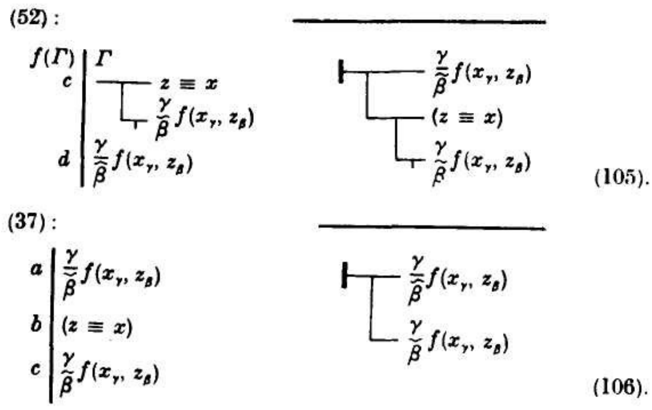


§30

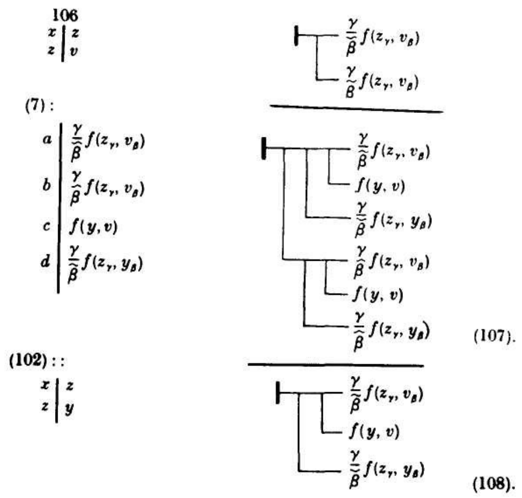
99



(90)



Lo que sigue a x en la serie f, pertenece a la serie f que comienza con x.

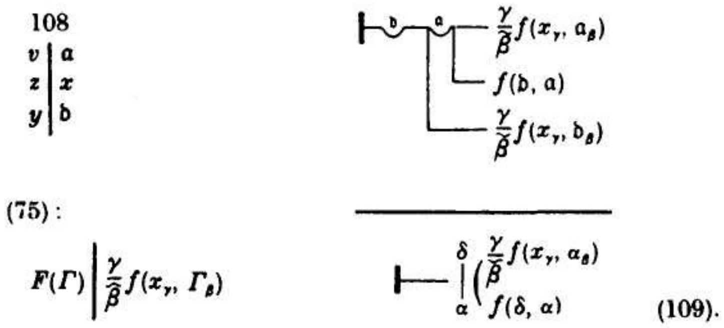


(91) Demos aquí, verbalmente, la derivación de (108).

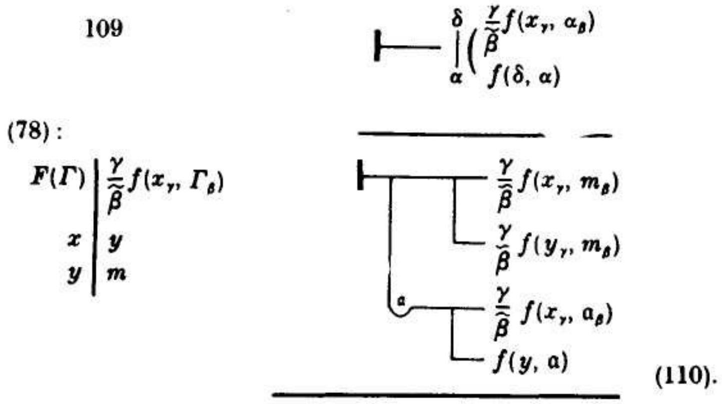
Si *y* pertenece a la serie *f* que comienza con *z*, entonces, según (102), cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *y,* sigue a z en la serie *f.* Según (106), pues, cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *y*, pertenece a la serie *f* que comienza con *z*.

Por lo tanto:

Si y pertenece a la serie f que comienza con z, *entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con z.*

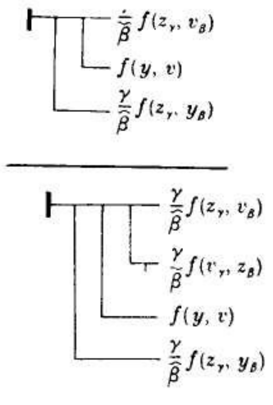


La propiedad de pertenecer a la serie f que comienza con z, se hereda en la serie f.

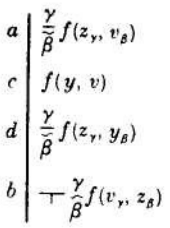


(92)

108



(25) :



(111).

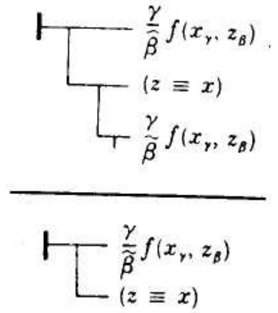
Lo que sigue es, verbalmente, la derivación de (111).

> Si *y* pertenece a la serie *f* que comienza con *z*, entonces, según (108), cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre y, pertenece a la serie *f* que comienza con *z.* Por tanto, entonces, cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre y, pertenece a la serie *f* que comienza con *z* o precede a z en la serie *f.*

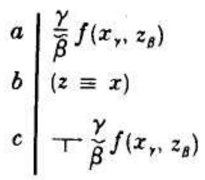
Por lo tanto:

> Si y *pertenece a la serie f que comienza con z, entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* y, *pertenece a la serie f que comienza con z, o precede a z en la serie f.*

105



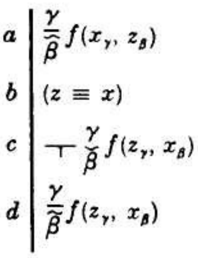
(11) :

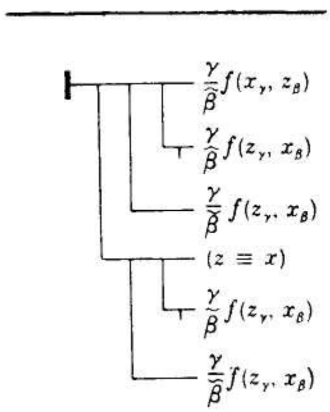


(112).

(93)

(7) :

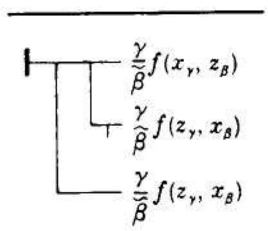




(113).

(104) : :

x	z
z	x



(114).

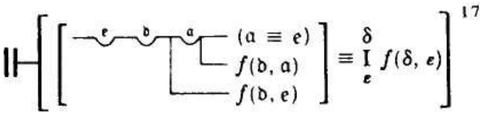
Lo que sigue es, verbalmente, la derivación de esta fórmula:

> Sea que: *x* pertenece a la serie *f* que comienza con *z*. Entonces, según (104), *z* es lo mismo que *x*; o *x* sigue a *z* en la serie *f*. Si *z* es lo mismo que *x*, entonces, según (112), *z* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*.
>
> De las dos últimas proposiciones se sigue: *z* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*; o *x* sigue a *z* en la serie *f*.

Por lo tanto:

> *Si x pertenece a la serie f que comienza con z, entonces z pertenece a la serie f que comienza con* x; o x *sigue a z en la serie f*.

§31.



[17] (115).

(94) Traduzco

$\mathop{\mathrm{I}}\limits_{\varepsilon}^{\delta} f(\delta, \varepsilon)$

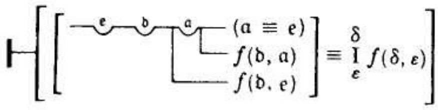
por "la circunstancia de que el procedimiento *f* es unívoco". Así, (115) se puede trasladar de esta manera:

> *Si de la circunstancia de que* **e** *es resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* **b**, *sea lo que fuere* **b** *, se puede inferir que cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* **b** *es lo mismo que* **e**,

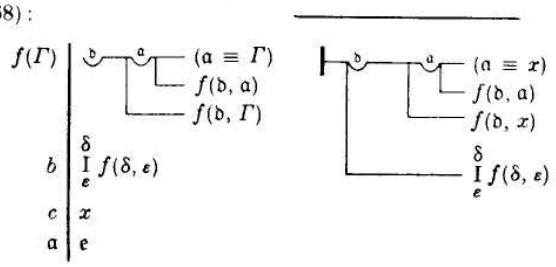
entonces digo:

> *"el procedimiento f es unívoco".*

115

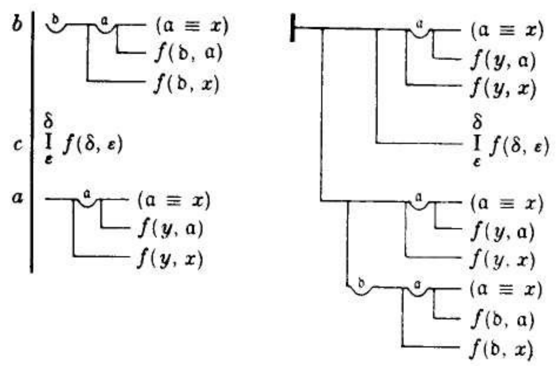


(68) :



(116).

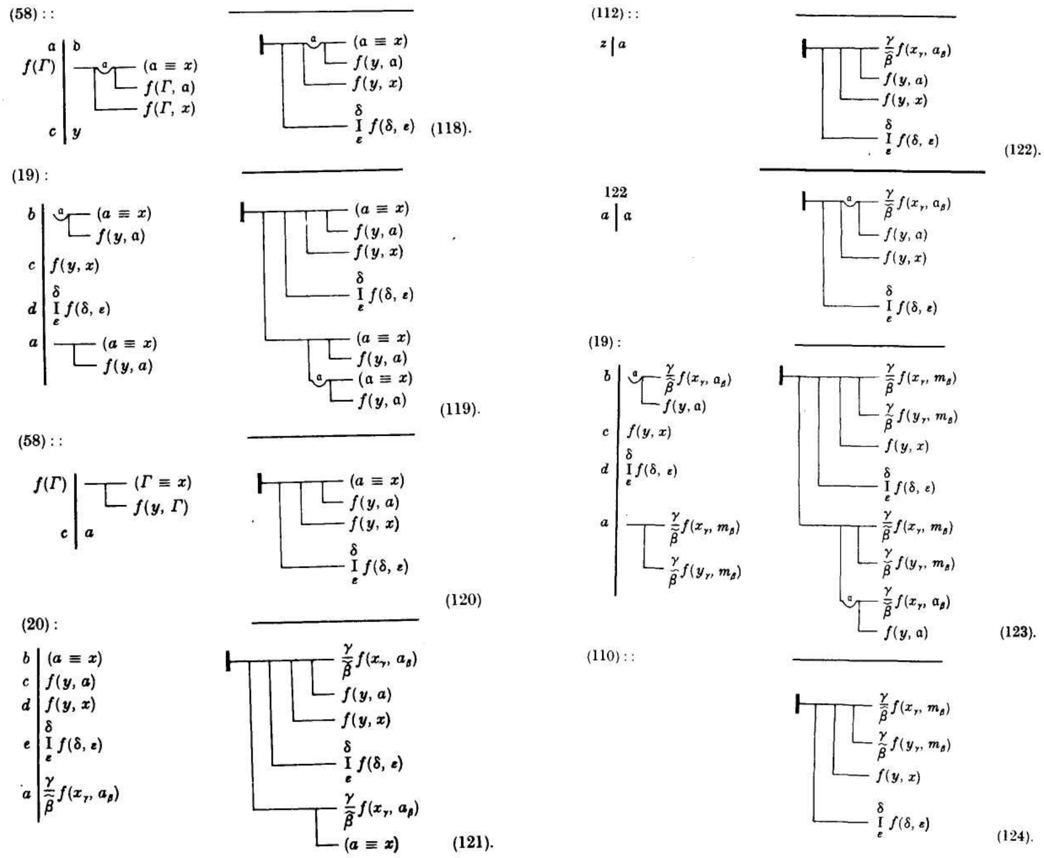
(9) :



(117).

(95) (96)

[17] *Cfr.* § 24.



(97) Demos aquí, verbalmente, la derivación de las fórmulas (122) y (124).

> Sea *x* resultado de una aplicación del procedimiento unívoco *f* sobre *y*.
> Así, según (120), cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *y*, es lo mismo que *x*.
> Por lo tanto, según (112) cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre *y*, pertenece a la serie *f* que comienza con *x*.

Así:

> *Si x es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco f sobre* y, *entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre* y, *pertenece a la serie f que comienza con x* (fórmula 122).

Sea que: *m* sigue a *y* en la serie *f*. De esta manera, de (110) se deduce:

> si cada resultado de una aplicación del procedimiento *f* sobre y pertenece a la serie *f* que comienza con *x*, entonces *m* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*.

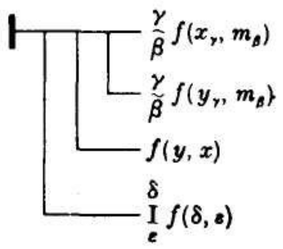
Esto, junto con (122), muestra que

> si *x* es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco *f* sobre y, *m* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*.

Así:

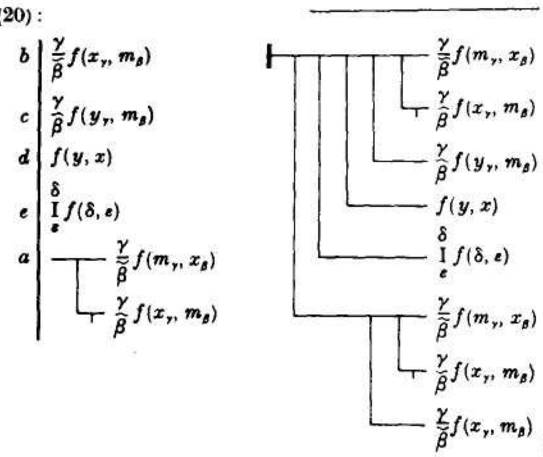
> *Sí x es resultado de una aplicación del procedimiento unívoco sobre y,* y *si m sigue a y en la serie f, entonces m pertenece a la serie f que comienza con x* (fórmula (124).

124



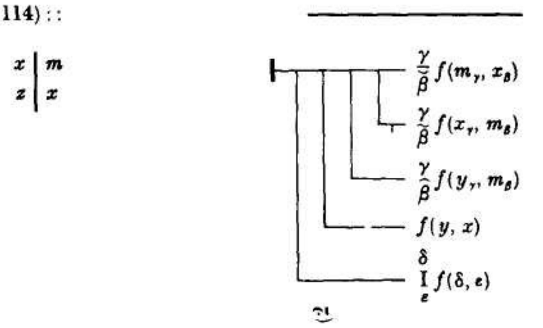
(98)

(20) :



(125).

(114) : :



(126).

Lo que sigue es, verbalmente, la derivación de estas fórmulas.
Sea *x* resultado de una aplicación del procedimiento unívoco *f* sobre *y.*
Siga *m* a *y* en la serie *f.*
Así, según (124), *m* pertenece a la serie *f* que comienza con *x*.
Consecuentemente, según (114), x pertenece a la serie *f* que comienza con *m;* o *m* sigue a x en la serie *f.*

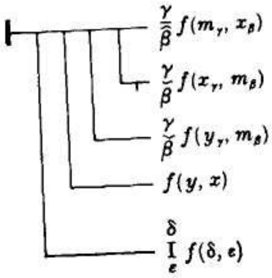
Esto también se puede expresar así:

x pertenece a la serie *f* que comienza con *m* o precede a *m* en la serie *f.*

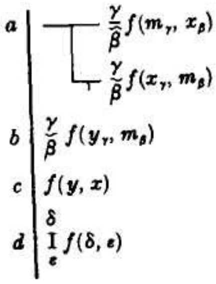
Por lo tanto:

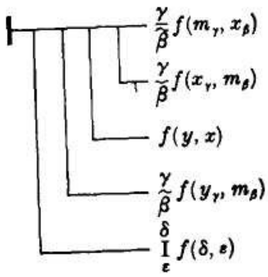
Si m sigue a y en la serie f, y si el procedimiento f es unívoco, entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con m, o precede a m en la serie f.

(99)

126 

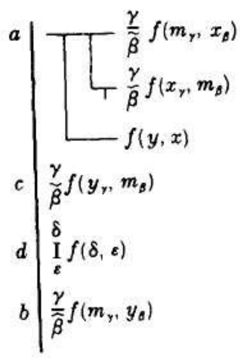
(12) :

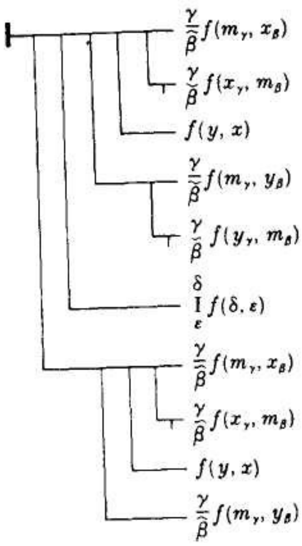




(127).

(51) :



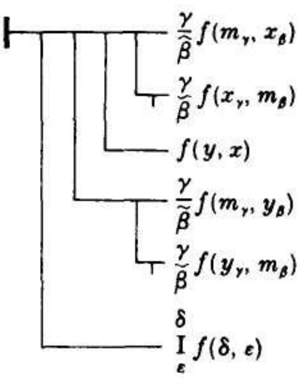


(128).

(100)

(111) : :

$\begin{array}{c|c} z & m \\ v & x \end{array}$

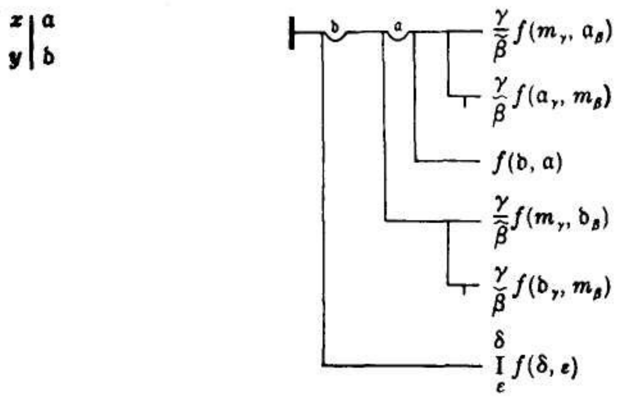


(129).

Verbalmente, (129) dice así:

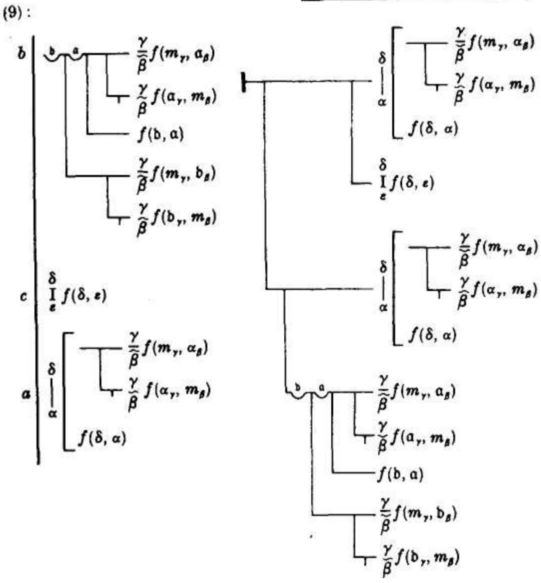
> *Si el procedimiento f es unívoco, y si y pertenece a la serie f que comienza con m* o *precede a m en Id serie f, entonces cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre y, pertenece a la serie f que comienza con m, o precede a m en la serie f.*

129



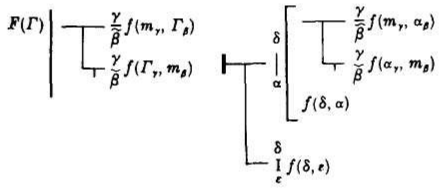
(101)

(9) :



(130).

(75) : :

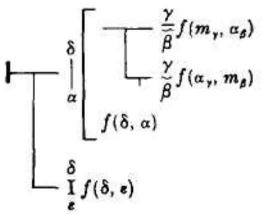


(131).

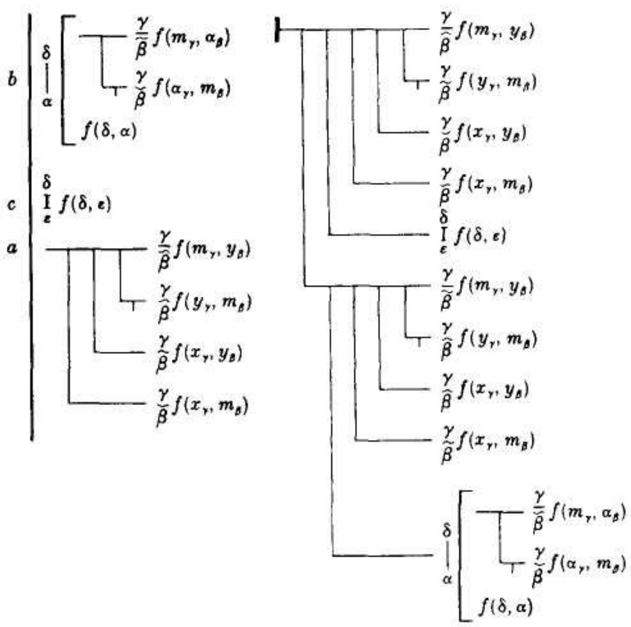
(102) Verbalmente, (131) dice así:

> Si *el procedimiento f es unívoco, entonces en la serie f se hereda la propiedad de pertenecer a la serie f que comienza con m, o la de preceder a m en la serie f.*

131



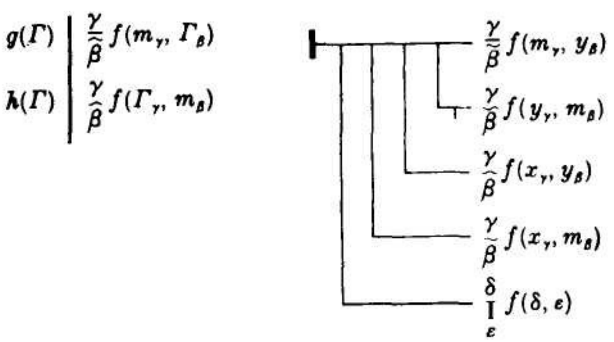
(9) :



(132).

(103)

(83) :



(133).

Verbalmente esta proposición dice así:

> *Sí el procedimiento f es unívoco, y si m e y siguen a x en la serie f, entonces y pertenece a la serie f que comienza con m, o precede a m en la serie f.*

En seguida hay una tabla por la cual se ve en qué lugares se hizo uso de una fórmula para la derivación de otras. Uno se puede servir de ellas para revisar las maneras de aplicar una fórmula. A partir de ella también, se advierte la frecuencia de aplicación de una fórmula.

A la derecha aparece siempre el número de la fórmula en cuya derivación se empleó la fórmula mencionada a la izquierda.

1	3	7	94	12	35	23	48	47	49	63	91	84	98	109	110
1	5	7	107	12	49	24	25	48	101	64	65	85	86	110	124
1	11	7	113	12	60	24	63	49	50	65	66	86	87	111	129
1	24	8	9	12	85	25	111	50	51	66	__	87	88	112	113
1	26	8	10	12	127	26	27	51	128	67	68	88	95	112	122
1	27	8	12	13	14	27	42	52	53	68	70	89	90	113	114
1	36	8	17	14	15	28	29	52	57	68	77	90	91	114	126
2	3	8	26	15	88	28	33	52	89	68	116	90	93	115	116
2	4	8	38	16	17	29	30	52	105	69	70	91	92	116	117
2	39	8	53	16	18	30	59	52	75	69	75	92	102	117	118
2	73	8	62	16	22	31	32	53	55	70	71	93	94	118	119
2	79	8	66	17	50	32	33	53	92	71	72	94	95	119	120
3	4	8	74	17	78	33	34	54	55	72	73	95	96	120	121
4	5	8	84	18	19	33	46	55	56	72	74	96	97	121	122
5	6	8	96	18	20	34	35	55	104	73	87	96	102	122	123
5	7	9	10	18	23	34	36	56	57	74	81	97	98	123	124
5	9	9	11	18	51	35	40	57	68	75	97	98	__	124	125
5	12	9	19	18	64	36	37	57	100	75	109	99	100	125	126
5	14	9	21	18	82	36	38	58	59	75	131	99	105	126	127
5	16	9	37	19	20	36	83	58	60	76	77	100	101	127	128
5	18	9	56	19	21	37	106	58	61	76	89	100	103	128	129
5	22	9	61	19	71	38	39	58	62	77	78	101	102	129	130
5	25	9	117	19	86	39	40	58	67	77	85	102	108	130	131
5	29	9	130	19	103	40	43	58	72	78	79	103	104	131	132
5	34	9	132	19	119	41	42	58	118	78	110	104	114	132	133
5	45	10	30	19	123	42	43	58	120	79	80	105	106	133	__
5	80	11	112	20	121	43	44	59	__	80	81	105	112		
5	90	12	13	20	125	44	45	60	93	81	82	106	107		
6	7	12	15	21	44	45	46	61	65	81	84	107	108		
7	32	12	16	21	47	46	47	62	63	82	83	108	109		
7	67	12	24	22	23	47	48	62	64	83	133	108	111		

[a] En este ensayo Frege usa tres tipos de letras: la común —en esta versión de Word en *Time New Roman*, la griega —en esta versión: *Symbol*, y la gótica —en esta version: Labrit que adjunto al archivo *rar.
[b] Estos numeros en rojo y entre paréntesis… indican el número de pagina del original.
[c] Letra Gamma mayúscula.
[d] Letra Delta mayúscula
[e] Letra Phi
[f] Letra Psi
[g] La letra "a" en gótica la escribo con la fuente: *Labrit*.

Algunos de las expesiones que usa Frege:

P (a) a **X** (a) **X** (**Δ**) **Φ** (a) **Ψ** **Ψ** (a) **Δ** (***x***)

Φ (*a*) **Γ** **Σ** **δ** **α** ***γ*** ***β***